ECOLES PRIVEES
ELMAARIF- ERRAJA

مدارس
الرجاء والمعارف الحرة

Classes :7C	Bac Blanc Epreuve de Mathématiques	Durée : 4H	29/03/2016

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

<u>Exercice 1(4 points)</u>

Pour tout z de $\mathbb{C}$ on pose: $P(z)=z^3-(5+6i)z^2+(-5+19i)z+18-6i$.

1.a) Calculer P(2i) et P(3+3i).

b) En déduire les nombres complexes z_1, z_2, z_3 solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $\operatorname{Im} z_1 \le \operatorname{Im} z_2 \le \operatorname{Im} z_3$.

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$; on considère les points A,B et C d'affixes respectives z_1, z_2, z_3.

Pour tout réel $\lambda \neq 0$, on définit l'application f_λ du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(1+\lambda)\overrightarrow{MC}$.

a) Donner l'expression complexe de l'application f_λ. Montrer que f_λ est une translation ou une homothétie. Discuter suivant les valeurs de λ, et caractériser l'application f_λ .

b) Retrouver les résultats de 2.a) en utilisant le calcul vectoriel.

<u>Exercice 2(5 points)</u>

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points: A(1, 0, 3) ; B(3, 2, 1) ; C(5, 1, 8) et S(2,-3,-1).

1. a) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Démontrer que le triangle *ABC* est un triangle rectangle en *A*.

2. a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{OS}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire une équation cartésienne du plan (*ABC*).

3.a) Donner une représentation paramétrique de la droite (OS) et préciser les coordonnées du point G intersection de la droite (OS) avec le plan (ABC).

b) Vérifier que $G=\operatorname{bar}\{(O,15),(S,-1)\}$

c) Démontrer que *G* est le barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on déterminera.

4.a)On considère l'ensemble Γ_1 des points M de l'espace tels que :

$$47MA^2+14MB^2-19MC^2=-1044$$

Vérifier que $O\in\Gamma$. Préciser Γ_1.

b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace dans chacun des cas suivants :

$$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow (47\overrightarrow{MA}+14\overrightarrow{MB}-19\overrightarrow{MC})(15\overrightarrow{MO}-14\overrightarrow{MG})=0$$

$$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow (47\overrightarrow{MA}+14\overrightarrow{MB}-19\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=0$$

<u>Exercice 3(5 points)</u>

Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 2^+ et dresser le tableau de variation de f .

2. a) Etudier la position relative de C_f par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.

b) Etudier la branche infinie de C_f en $+\infty$ et tracer la courbe C_f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3. a) Montrer que f est une bijection de $\left[2,+\infty\right[$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Expliciter l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

4) Pour $x \in \left]0,1\right]$ on pose : $F(x)=\int_2^{\frac{2}{x}} f(t)dt$.

a) Justifier l'existence de F sur l'intervalle $\left]0,1\right]$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\left]0,1\right]$ et calculer $F'(x)$.

5. a) Montrer que pour tout $t \in \left[2,+\infty\right[$, $f(t) \geq \ln t$.

b) Calculer l'intégrale : $\int_2^{\frac{2}{x}} \ln t dt$.

c) En déduire que pour tout $x \in \left]0,1\right]$, $F(x) \geq \frac{2}{x}\left(\ln\left(\frac{2}{x}\right)-1\right)$ et en déduire : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$.

d) Dresser le tableau de variation de F sur $\left]0,1\right]$.

<u>Exercice 4(6 points)</u>

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2-x)e^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty.$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner l'équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse 0. Vérifier que A est un point d'inflexion de (C).

d) Tracer la courbe (C).

2) On considère l'équation différentielle (E): $y''-2y'+y=0$.

a) Trouver la solution générale de l'équation E sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que les fonctions f et f' sont des solutions de l'équation différentielle (E).

c) Trouver l'expression de la dérivée n-ième de f ; où n est un entier strictement positif.

3) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel par : $U_n=\frac{2^n}{n!}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 2$, $0\leq\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{2}{3}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 2$, $0\leq U_n\leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) Pour tout entier naturel $n\geq 1$; on pose $I_n=\frac{1}{n!}\int_0^2(2-x)^n e^x dx$ et $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} U_k=1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+...+\frac{2^n}{n!}$.

a) Justifier que $I_1=e^2-3$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $0\leq I_n\leq(e^2-1)U_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1}=I_n-U_{n+1}$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n\geq 1$, $e^2=S_n+I_n$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=e^2$.

Fin.