6C	DEVOIR DE MATHS	DUREE 4H	11/01/2010

EXERCICE 1 (3 POINTS)

Soit I un intervalle centré en 0 et f une fonction continue sur I.

On définit les fonctions : $F(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$ **et** $G(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$.

1) Montrer que la fonction F est dérivable sur I puis exprimer sa dérivée en fonction de f.
2) On suppose dans cette question que f est une fonction impaire. Montrer que G est paire.
3) On suppose dans cette question que f est une fonction paire. Montrer que G est impaire.

EXERCICE 2 (4 POINTS)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

E_α $\quad z^2-2z\sin\alpha+1=0$ **où** α **est un réel donné.**

1) Résoudre l'équation E_α **et donner les solutions sous formes algébrique et trigonométrique.**
2) En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :

$$z^{2n}-2z^n\sin\alpha+1=0 \text{ où } n\in IN^* \text{ donné.}$$

EXERCICE 3 (4 POINTS)

Dans le plan orienté on considère un parallélogramme direct ABCD. Soient ADM ; BAP et ACN des triangles directs rectangles isocèles respectivement en A ; B et C. Les affixes des points A ; B et C sont notées respectivement a ; b et c.

1.a) Placer les données sur une figure.
b) Exprimer en fonction de a ;b et c les affixes respectives p ;n ;m et d des points P ;N ;M et D.
2.a) Montrer que $p-c=i(m-b)$**. En déduire que** $PC=MB$ **et** $(PC)\perp(MB)$**.**
b) Montrer que $BN=MC$ **et** $(BN)\perp(MC)$**.**
c) Montrer que les droites (AM) ; (BN) et (CP) sont concourantes.
3) Soient K et L les milieux respectifs des segments [AN] et [AP]. On note k et l leurs affixes respectives.
a) Montrer que $m-k=-i(b-k)$ **et** $m-l=i(c-l)$**.**
b) Déterminer la nature de chacun des triangles BKM et MLC.

EXERCICE 4 (4 POINTS)

Soit la fonction f_m **définie par :**

$$f_m(x)=2x-3m+\frac{4}{(2x-m)^2} \quad \text{où m est un paramètre réel .}$$

Soit (C_m) **sa courbe représentative dans repère orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j})$**.**
1) Etudier les variations de la fonction f_0**.**
2) Montrer que la courbe (C_0) **admet deux asymptotes à déterminer puis le construire.**
3) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_0)**, l'axe (Ox) et les droites d'équations** $x=1$ **et** $x=2$**.**

$i^2=-1$

4) Montrer que la courbe (C_m) admet deux asymptotes.

Soit Ω_m leur intersection. Déterminer le lieu géométrique du point Ω_m lorsque m décrit IR.

5) Montrer que la courbe (C_m) est l'image de (C_0) par une transformation simple à préciser.

6) Déterminer le lieu géométrique du point Ω_m lorsque m décrit IR.

Déterminer le lieu géométrique du point I_m de (C_m) tel que la tangente soit parallèle à (Ox) lorsque m décrit IR.

EXERCICE 5 (5 POINTS)

Soit la fonction f définie par : $f : [0; \frac{\pi}{2}[\to IR; \qquad x \mapsto f(x) = \tan^2 x$

1) Dresser le tableau de variations de f.

2.a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur IR_+.

Etudier la dérivabilité de g et calculer sa dérivée.

b) Calculer g(0) ; g(1) et g(3).

c) Construire les courbes représentatives de f et de g dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Préciser les tangentes à l'origine.

d) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe de f , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = 0$.

3.a) Démontrer que: $\forall n \in IN, \forall k \in \{0,1,...,n\}; \quad g(\frac{1}{2n}) \le g(\frac{1}{n+k}) \le g(\frac{1}{n})$.

b) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=o}^{n} g(\frac{1}{n+k})$.

Démontrer que: $\forall n \in IN^*; g(\frac{1}{2n}) \le U_n \le g(\frac{1}{n})$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

4.a) Démontrer que: $\forall x \in IR_+^*, \quad g(x) + g(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

b) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=o}^{n} g(n+k)$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n}{n}$.

Fin.