**Bac Blanc**

Classes :7C **Epreuve de Mathématiques** Durée : 4H 24/03/2015

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.*

**Exercice 1 (3 points)**

**1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $6x + 11y = 2013$.**

**a. Montrer que pour tout couple $(x, y)$ solution de (E), x est un multiple de 11 et $y$ un multiple de 3.**

**b. Déterminer une solution particulière de (E).**

**c. Résoudre (E).**

**2) On désigne par d le PGCD de x et y où $(x,y)$ est une solution de (E).**

**a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?**

**b) Déterminer, s'ils existent, les couples (p, q) d'entiers naturels tels que $6m + 11d = 2013$, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.**

**Exercice 2 (4 points)**

**Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.**

**1. On pose : $P(z) = z^3 - (5+3i)z^2 + (4+12i)z + 4 - 12i$ où $z$ est un nombre complexe.**

**a) Calculer $P(2)$ et déterminer les nombres $a$ et $b$ tels que pour tout $z$ de $\mathbb{C}$ : $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$.**

**b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.**

**2. Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\mathrm{Im}(z_A) < \mathrm{Im}(z_B) < \mathrm{Im}(z_C)$.**

**a) Calculer l'affixe du point $G$ barycentre du système $\{(A;5),(B;-6),(C;-3)\}$.**

**b) Placer les points $A$, $B$, $C$ et G. Montrer que les points G, $A$, B et $C$ sont cocycliques.**

**c) Déterminer et représenter l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ d'affixe $z$ telle que le nombre $\dfrac{z-2i}{z-3-i}$ soit imaginaire pur.**

**3. Pour tout point $M$ du plan on pose $\varphi(M) = 5MA^2 - 6MB^2 - 3MC^2$ et $\Gamma_k$ l'ensemble des points $M$ tels que $\varphi(M) = k$, où $k$ est un réel.**

**a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de $\Gamma_k$.**

**b) Reconnaître et construire $\Gamma_{-20}$.**

**Exercice 3 (4 points)**

**Dans le plan, on considère un rectangle ABCD tel que $AB = 2AD = 2a$. Soit le point G tel que $G = \mathrm{bar}\{(A,-2),(B,4),(C,3),(D,3)\}$.**

**1.a) Montrer que $G = \mathrm{bar}\{(B,2),(C,5),(D,1)\}$.**

**b) Déterminer des réels a ;b et c tels que $G = \mathrm{bar}\{(A,a),(C,c),(D,d)\}$.**

**c) On note I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\overrightarrow{GC} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{IC}$ et placer G sur la figure.**

2) Déterminer ; dans chacun des cas suivants ; l'ensemble des points M du plan :

a) $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \left\| -2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \right\| = \left\| 4\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} \right\|$

b) $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \left\| 2\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\|$

c) $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow -2MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 + 3MD^2 = 6a^2$

d) $M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow 2MB^2 - 3MC^2 + MD^2 = 2a^2$

e) $M \in \Gamma_5 \Leftrightarrow (-2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$ .

## Exercice 4 (4 points)

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)e^x$. Soit $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ \text{ et } \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \ .$$

b) Dresser le tableau de variation de $f$ .

c) Donner l'équation de la tangente T à $(C)$ au point A d'abscisse 0. Vérifier que A est un point d'inflexion de $(C)$ .

d) Tracer la courbe $(C)$.

2) On considère la suite numérique $(U_n)$ définie pour tout entier naturel par : $U_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ , $0 \leq \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{2}{3}$ .

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ , $0 \leq U_n \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ ; on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x dx$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k = 1 + 2 + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^3}{3!} + ... + \dfrac{2^n}{n!}$ .

a) Justifier que $I_1 = e^2 - 3$ .

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ , $0 \leq I_n \leq (e^2 - 1)U_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $e^2 = S_n + I_n$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = e^2$.

## Exercice 5 (5 points)

1) On considère la fonction numérique $f$ définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln(x+1) - x\ln x, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue à droite de zéro.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ . Interpréter graphiquement.

2.a) Vérifier que $f''(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de $f$.

c) Construire la courbe de f.

d) Calculer $A_1$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (On pourra utiliser une intégration par parties).

3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ ; on pose: $\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ et $A_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique $(A_n)$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$ où f est la fonction définie dans la question 1).

c) Justifier que $0 \leq A_n \leq \dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

4) On pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer $I_1 = \int_0^1 x \ln(x+1)dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \dfrac{2\ln 2}{n+2} - \dfrac{1}{(n+2)^2} - \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ .

5) Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. $g_n$ la fonction définie par : $\begin{cases} g_n(x) = -x^n \ln x; & x > 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que la fonction $g_n$ est continue sur [0;1].

b) Soit $G_n$ la fonction définie sur [0;1] par :

$$\begin{cases} G_n(t) = -\dfrac{t^{n+1} \ln t}{n+1} + \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2}; & t > 0 \\ G_n(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que $G_n$ est une primitive de $g_n$ sur [0;1].

c) En déduire la valeur de $J_n = \int_0^1 g_n(t)dt$ en fonction de n. Vérifier que $J_1 = \dfrac{1}{4}$.

6.a) En utilisant 4.a) et 5.c) retrouver la valeur de $A_1$ calculée en 1.d).

b) Calculer $A_2$.

Fin.