Classes :7C	Devoir de Mathématiques	Durée : 4H	16/05/2016

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

Exercice 1 (2.5 points)

Soit x et y des entiers relatifs. On pose $f(x,y)=3x-4y$

1.a) Calculer $f(7,5)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $3x-4y=1$.

2) Pour tout entier naturel *n* on pose $X_n=f(7^n,5^n)$.

Trouver, suivant les valeurs de *n*, le reste de la division euclidienne de X_n par 11.

Exercice 2 (3.5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(2+2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z-2-2i)(z^2+az+b).$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

c) Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $Im(z_A)<Im(z_B)<Im(z_C)$.

Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-3),(C;3)\}$ et placer les points A ,B ,C et G.

2) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M)=2MA^2-3MB^2+3MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=m$, où m est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de m, la nature de Γ_m.

b) Reconnaître et tracer Γ_{60}.

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction $g(x)=-\ln(1-xe^{-x})$.

1.a) Montrer que pour tout réel x, on a $e^x>x$. En déduire que le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$. Donner une interprétation graphique.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, puis calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$.

2.a) Vérifier que $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x-x}$ et dresser le tableau de variation de g.

b) Tracer Γ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-x}$.

a) Vérifier que $f(x)=e^{g(x)}$.

b) Déduire de la question 1) : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. Donner une interprétation graphique.

c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe Γ' dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe Γ', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Montrer que $1\le A\le\dfrac{e}{e-1}$. On ne cherche pas à calculer la valeur exacte de A.

4) Pour tout entier naturel n, on pose: $I_n=\int_0^1 x^n e^{-nx}dx$, pour $n\in\mathbb{N}^*$; et $I_0=1$

a) Calculer I_1, (On pourra utiliser une intégration par parties).

b) Montrer que pour tout entier naturel $n>1$ on a , $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

5) On pose pour tout entier naturel n: $S_n = I_0 + I_1 + \ldots + I_n$.

a) Justifier que : $S_n = \int_0^1 \frac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}dx$.

b) Montrer que : $A - S_n = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}dx$.

c) Montrer que : $0 \le A - S_n \le \frac{2}{n+2}$. En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} S_n = A$.

d) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$, A soit une valeur approchée de S_n à 10^{-3} près.

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct ABCD de centre O et de coté a, $(a>0)$. Soient K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[DA]$.

1) Faire une figure illustrant les données précédentes.

2) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L. Préciser le centre et un angle de r.

3.a) Prouver qu'il existe une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O. Déterminer le rapport et un angle de f_1.

b) Soit P le centre de la similitude f_1. Vérifier que le point P est commun aux cercles de diamètres $[AB]$ et $[OD]$ puis le préciser. Vérifier que P est aussi le point d'intersection des deux droites (BL) et (AK).

4.a) Soit f_2 la similitude directe qui transforme B en D et O en L. Préciser son angle et son rapport.

b) Montrer que le centre de la similitude f_2 est le point P : même centre de f_1.

5.a) Soit $h = f_1 \circ f_2$. Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre est le rapport. En déduire deux réels β et γ tels que $P = bar\{(B,\beta);(L,\gamma)\}$.

b) Déterminer deux réels α et λ tels que $P = bar\{(A,\alpha);(K,\lambda)\}$.

Exercice 5 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct ABCD de longueur AD tel que AB=a et AD=2a, $(a>0)$. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit O le centre du rectangle ABCD.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes.

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en L et A en D. Préciser le centre et un angle de r.

2.a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme I en D et B en K.

b) Montrer que g est une symétrie glissante et vérifier que $g(J) = O$.

c) Donner la forme réduite de g.

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme A en C et B en L. Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que $s(J) = B$.

b) Soient Γ_1 le cercle de centre A passant par B, et Γ_2 le cercle de centre C passant par L. Justifier que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

4) On désigne par P le centre de s.

a) Montrer que P est situé sur les cercles Γ_1 et Γ_2. Préciser P.

b) Vérifier que P est le symétrique de L par rapport à (AC).

c) Soit E le symétrique de L par rapport à D. Vérifier que P est situé sur la droite (BE).

Fin.