

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

Exercice 1 (3 points)

1) On considère dans Z^2 l'équation (E) : $6x + 11y = 2013$.

a. Montrer que pour tout couple (x, y) solution de (E), x est un multiple de 11 et y un multiple de 3.

b. Déterminer une solution particulière de (E).

c. Résoudre (E).

2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x, y) est une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b) Déterminer, s'ils existent, les couples (p, q) d'entiers naturels tels que $6m + 11d = 2013$, où d désigne le pgcd de p et q , et m leur ppcm.

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On pose : $P(z) = z^3 - (5 + 3i)z^2 + (4 + 12i)z + 4 - 12i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(2)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de \mathbb{C} : $P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$.

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$.

a) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A; 5), (B; -6), (C; -3)\}$.

b) Placer les points A, B, C et G . Montrer que les points G, A, B et C sont cocycliques.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\frac{z - 2i}{z - 3 - i}$ soit imaginaire pur.

3. Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M) = 5MA^2 - 6MB^2 - 3MC^2$ et Γ_k l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = k$, où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k , la nature de Γ_k .

b) Reconnaître et construire Γ_{-20} .

Exercice 3 (4 points)

Dans le plan, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2AD = 2a$. Soit le point G tel que

$G = \text{bar}\{(A, -2), (B, 4), (C, 3), (D, 3)\}$.

1.a) Montrer que $G = \text{bar}\{(B, 2), (C, 5), (D, 1)\}$.

b) Déterminer des réels a, b et c tels que $G = \text{bar}\{(A, a), (C, c), (D, d)\}$.

c) On note I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\vec{GC} = \frac{1}{4}\vec{IC}$ et placer G sur la figure.

2) Déterminer ; dans chacun des cas suivants ; l'ensemble des points M du plan :

- a) $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \|-2\vec{MA} + 4\vec{MB} + 3\vec{MC} + 3\vec{MD}\| = \|4\vec{GA} + 4\vec{GB}\|$
 b) $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \|2\vec{MB} + 5\vec{MC} + \vec{MD}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$
 c) $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow -2MA^2 + 4MB^2 + 3MC^2 + 3MD^2 = 6a^2$
 d) $M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow 2MB^2 - 3MC^2 + MD^2 = 2a^2$
 e) $M \in \Gamma_5 \Leftrightarrow (-2\vec{MA} + 4\vec{MB} + 3\vec{MC} + 3\vec{MD})(\vec{MA} + \vec{MB}) = \vec{0}$.

Exercice 4 (4 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2-x)e^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Donner l'équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse 0. Vérifier que A est un point d'inflexion de (C).

d) Tracer la courbe (C).

2) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel par : $U_n = \frac{2^n}{n!}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq U_n \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$; on pose $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^2 (2-x)^n e^x dx$ et $S_n = \sum_{k=0}^n U_k = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!}$.

a) Justifier que $I_1 = e^2 - 3$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq (e^2 - 1)U_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $e^2 = S_n + I_n$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^2$.

Exercice 5 (5 points)

1) On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln(x+1) - x \ln x, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue à droite de zéro.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique.

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement.

2.a) Vérifier que $f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Construire la courbe de f .

d) Calculer A_1 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ (On pourra utiliser une intégration par parties).

3) Pour tout entier naturel $n \geq 1$; on pose:
$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$
 et $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (A_n) .

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$ où f est la fonction définie dans la question 1).

c) Justifier que $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

4) On pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer $I_1 = \int_0^1 x \ln(x+1) dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \frac{2 \ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2} I_n$.

5) Soit n un entier naturel, $n \geq 1$, g_n la fonction définie par :
$$\begin{cases} g_n(x) = -x^n \ln x; & x > 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction g_n est continue sur $[0;1]$.

b) Soit G_n la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} G_n(t) = -\frac{t^{n+1} \ln t}{n+1} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}; & t > 0 \\ G_n(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que G_n est une primitive de g_n sur $[0;1]$.

c) En déduire la valeur de $J_n = \int_0^1 g_n(t) dt$ en fonction de n . Vérifier que $J_1 = \frac{1}{4}$.

6.a) En utilisant 4.a) et 5.e) retrouver la valeur de A_1 calculée en 1.d).

b) Calculer A_2 .

Fin.