6C	DEVOIR DE MATHS	DUREE 4H	22/02/2010

EXERCICE 1 (4 POINTS)

On se propose dans cet exercice de calculer par deux méthodes la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1) Soient f la fonction de variable réelle définie par: $f(x)=e^x-x-1$.

a) Etudier les variations de f et montrer que pour tout réel non nul x: $1+x<e^x$.

En déduire que: $\forall x\in]0;1[;\quad e^x<\frac{1}{1-x}$.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

c) En déduire que pour tout $n\in IN^*$: $1<\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<1+\frac{1}{n}$; puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2) Soient g la fonction définie par tout réel strictement positif x par: $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

En utilisant une modification d'écriture, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

EXERCICE 2 (5 POINTS)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E: z^2-6iz-9-2i=0$. On note z_1 et z_2 ces solutions avec $|z_2|<|z_1|$.

2) On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et on note A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Soit Ω le milieu du segment $[AB]$. Soit f l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{3iz+9+2i}{z-3i}$.on note f(M)=M'.

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b) Montrer que les points A,B,M,M' sont cocycliques ou alignés.

3 .a) Montrer que $(z'-3i)(z-3i)=2i$, en déduire que $\Omega M\times\Omega M'=2$.

b) Montrer que $(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M})+(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M'})=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; en déduire une construction géométrique (justifiée) du point M' à partir d'une position donnée du point M non situé sur la droite (AB).

4) Déterminer le lieu géométrique du point M' à partir du lieu de M dans les cas suivants :

a) M décrit le cercle de centre Ω et de rayon r.

b) M ; distinct de Ω ; décrit la droite passant par Ω et parallèle à la droite d'équation $y=x$

5) Réciproquement; déterminer le lieu géométrique de M à partir du lieu de M' dans les cas suivants :

a) M' décrit le cercle de centre O et de rayon 1.

b) M' décrit le cercle de centre O et de rayon 3.

PROBLEME (11 POINTS)

Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$\begin{cases} f_n(x) = x(\ln x)^n ; \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$; unité 2cm.

PARTIE A

1 .a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n à droite de zéro. Interpréter graphiquement.

b) Vérifier que: $f'_n(x) = (n + \ln x)(\ln x)^{n-1}$.

2.a) Dresser les tableaux de variations de f_n suivant la parité de n (On distinguera le cas n=1).

b) Montrer que les courbes C_n passent par trois points fixes : l'origine O et deux points A et B tels que $0 < x_A < x_B$.

c) Etudier les positions relatives de C_1 et C_2 ; et les représenter dans le même repère.

3) On pose $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 f_n(t)dt$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < \alpha < 1$. On note $I_n = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} I_n(\alpha)$.

a) Calculer $I_1(\alpha)$. En déduire que $I_1 = -\frac{1}{4}$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$I_{n+1}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}(\ln \alpha)^{n+1} - \frac{n+1}{2} I_n(\alpha).$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = -\frac{n+1}{2} I_n$.

4) Soit A_n l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par C_n, les axes (Ox), (Oy) et la droite d'équation $x = 1$. On admet que $A_n = 4|I_n| \quad cm^2$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$: $A_{n+1} \geq 2A_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

PARTIE B

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $J_n = \int_1^e f_n(x)dx$.

1.a) Calculer J_0.

b) Montrer que la suite (J_n) est décroissante.

2.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2J_n + nJ_{n-1} = e^2$.

b) En déduire le calcul de J_1 et J_2.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{e^2}{n+3} \leq J_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.

d) En déduire les limites des suites (J_n) et (nJ_n).

FIN.