7D	DEVOIR DE MATHS	DUREE 4H	19/05/2012

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3 POINTS)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2-2z+5=0$ et $z^2-6z+10=0$

2) Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq 1+2i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-3-i}{z-1-2i}$.

a) Calculer le nombre $\alpha=f(1+3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

b) On considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A=1+2i$ et $z_B=3+i$.

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tel que $|f(z)|=1$. **Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.**

Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel. **Γ_4 tel que $|f(z)-1|=\sqrt{5}$.**

3) Déterminer et représenter dans le repère précédent le point C tel que le quadrilatère OABC soit un parallélogramme.

EXERCICE 2 (3 POINTS)

Une étude médicale a montré que 2% d'une population sont atteint d'une maladie M.

Un échantillon de n individus $(n\geq 2)$ a été choisi d'une façon aléatoire dans cette population pour être soumis à des testes de dépistage relatifs à la maladie M (on suppose l'équiprobabilité).

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'individus, de cet ensemble atteints de la maladie M.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer en fonction de n la probabilité de chacun des événements suivants :

A «Aucun individu de cet ensemble n'est atteint de la maladie M»

B « Un seul individu de cet ensemble est atteint de la maladie M »

C « Au moins un individu de cet ensemble est atteint de la maladie M ».

3. Soit p_n la probabilité d'avoir au moins un individu de cet échantillon atteint de la maladie M donc $p_n=p(C)$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter le résultat.

b) Quel est le plus petit nombre n d'individus à tester afin d'avoir $p_n\geq 0,95$?

EXERCICE 3 (4 POINTS)

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$\begin{cases} U_1=1 \\ U_{n+1}=3-\dfrac{2n}{3(n+1)}(3-U_n),\ \forall n\in IN^* \end{cases};$$

1) Vérifier que $U_2=\dfrac{7}{3}$ puis calculer U_3 ; U_4.

2.a) Démontrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 3.

b) Montrer que pour tout n de IN^* on a : $U_{n+1}-U_n=\dfrac{n+3}{3(n+1)}(3-U_n)$. En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

3) Déduire que la suite (U_n) est convergente.

4) On pose pour tout n de IN^* : $V_n = n(3 - U_n)$.

a) **Calculer $V_1 ; V_2$ et montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.**

b) exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Montrer que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite. En déduire la limite de (U_n).

d) Calculer par une deuxième méthode la limite de (U_n).

5) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \cdots + nU_n$.

<u>EXERCICE 4 (5 POINTS)</u>

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = 2x - 3 + e^x$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer et donner une interprétation graphique de : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (2x-3))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α puis vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.

5. Construire les courbes (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6. On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \ln(2x - 3 + e^x)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g. b) Dresser le tableau de variation de g.

c) Construire la courbe (Γ) de g dans un nouveau repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

<u>EXERCICE 5 (5 POINTS)</u>

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 3 - \dfrac{\ln x}{x}$. On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Démontrer chacun des résultats suivants et en donner une interprétation géométrique.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - (x-3)\big) = 0$.

2.a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$ on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$.

b) Vérifier que : $\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow & f'(x) \geq 0 \\ 0 < x \leq 1 \Rightarrow & f'(x) \leq 0 \end{cases}$. c) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ exactement deux solutions α et β. Vérifier que : $0,37 < \alpha < 0,38$ et $3,36 < \beta < 3,37$.

b) Déterminer un point de (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$ et déterminer une équation de cette tangente.

c) Construire la courbe (C).

d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\ln x = mx$ où m est un paramètre réel.

BONUS : PRESENTATION ET REDACTION : 2 POINTS

Fin.