7D	DEVOIR DE MATHS	DUREE 3H	17/11/2013

Présentation et rédaction : 2 points

EXERCICE 1 (6 POINTS)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

	Proposition	A	B	C	D
1	Si $Z=\frac{2+i}{2-i}$, alors	$\overline{Z}=\frac{1}{Z}$	$Z=\overline{Z}$	Z est un imaginaire pur.	$Z=1-2i$
2	Si $Z=2\sqrt{3}+2i$, alors	$\arg Z^2=-\frac{\pi}{3}$	$\arg\overline{Z}=\frac{\pi}{6}$	Z^3 est un imaginaire pur.	$\lvert Z\rvert=2\sqrt{2}$
3	Si $Z=\frac{-2}{3}(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors	$\lvert Z\rvert=\frac{-2}{3}$	$\lvert Z\rvert=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\lvert Z\rvert=\frac{2}{3}(1-i)$	$\lvert Z\rvert=\frac{2}{3}$
4	*Si* $\overline{z}+\lvert z\rvert=6+2i$, alors :	$z=\frac{1}{3}-5i$	$z=-\frac{8}{3}+2i$	$z=\frac{8}{3}+2i$	$z=\frac{8}{3}-2i$
5	Si $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{\sqrt{3}}{2}i$, alors le triangle *ABC* est :	isocèle et non rectangle	Equilatéral	rectangle et isocèle	rectangle et non isocèle
6	L'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que $\left\lvert\frac{z-1-2i}{1+2i}\right\rvert=\sqrt{5}$ est :	un cercle de rayon 5	la médiatrice d'un segment	une droite privée d'un point	un cercle privé de deux points
7	Si $Z=\frac{1}{3}(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors :	$\arg Z=\frac{\pi}{3}$	$\arg Z=\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{3}$	$\arg Z=\frac{5\pi}{12}$	$\arg Z=\frac{7\pi}{12}$
8	Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}^*$. La forme algébrique du nombre $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est :	$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	$e^{in\theta}$	$n\cos\theta+in\sin\theta$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse. **Justifier votre réponse.**

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

EXERCICE 2 (6 POINTS)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-2z+4=0$.

2) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2-2z\sqrt{2}+4=0$.

3.a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres $u=1-i\sqrt{3}$, $v=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ **et** $w=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}$.

b) Ecrire w sous forme algébrique.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\cos\frac{7\pi}{12}$.

4) Justifier les affirmations suivantes :

a) Le nombre $(w)^{12}$ est un réel négatif.

b) Le nombre $(v)^{2014}$ est imaginaire pur.

EXERCICE 3 (6 POINTS)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 2+i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-3+i}{z-2-i}$.

1) Calculer le nombre $\alpha = f(1+i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) Résoudre l'équation $f(z)=\dfrac{3-3i}{2-i}$

3) On considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 3-i$, $z_B = 2+i$ et $z_C = 2-i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Calculer le nombre $\beta = f(z_C)$. En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)|=1$.

b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel.

d) Γ_4 tel que $|f(z)-1|=\sqrt{5}$.

4) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Placer D.

Bonus : DM 3points

Fin.