ECOLES PRIVEES
ELMAARIF- ERRAJA

مدارس
الرجاء والمعارف الحرة

Devoir de Maths

Classes :7C **Durée : 4H** **02/02/2020**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (3 points)

On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x+10y=1$.

1.a) Justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b) Déterminer une solution particulière de (E).

c) En déduire une solution particulière de l'équation (E') $91x+10y=412$ puis la résoudre.

2) Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n}-1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.

3) On considère l'équation (E'') $A_3x+A_2y=3296$.

a) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').

b) Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

Exercice 2 (4 points)

Soit ABCD un quadrilatère convexe direct. On construit quatre carrés de centres respectifs P,Q,R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés [AB],[BC,[CD],[DA].

On considère un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ dans lequel les points A, B, C , D , P,Q,R et S ont pour affixes respectives a, b, c , d, p,q,r et s.

1) Le but de cette question est de démontrer que les segments [QS] et [PR] sont perpendiculaires et de même longueur.

a) Faire une figure.

b) Démontrer que dans le carré construit sur [AB] on a: $p=\dfrac{a-ib}{1-i}$.

c) Etablir des relations analogues pour q,r et s.

d) Calculer $\dfrac{s-q}{r-p}$. Conclure.

2) Démontrer que les quadrilatère ABCD et PQRS ont le même centre de gravité.

3) Démontrer que si le quadrilatère PQRS est un carré, alors ABCD est un parallélogramme.

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction de variable réelle x définie sur $[2,4]$ par $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-8}$.

Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$ puis interpréter graphiquement.

2) Dresser le tableau de variations de f et représenter Γ. Montrer que Γ est un arc d'un cercle C à préciser.

3) On se propose de calculer, par trois méthodes différentes, l'intégrale $I=\int_2^3 \sqrt{-x^2+6x-8}dx$.

Méthode a : Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $I=\int_2^3 \sqrt{-x^2+6x-8}dx$. Donner sa valeur sans calculs de primitives ou d'intégrales.

Méthode b : i) On pose $g(x)=\sin x$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$. Montrer que g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle que l'on déterminera et montrer que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

ii) Calculer la dérivée de la fonction H définie par : $H(x)=(x-3)\sqrt{-x^2+6x-8}+g^{-1}(x-3)$.

iii) Trouver une primitive de f sur l'intervalle $[2,4]$ et calculer I.

Méthode c : En posant $x=3+\cos t$, calculer I et comparer avec les résultats précédents.

Exercice 4 (7 points)

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie par:

$f_0(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$; et pour tout entier $n>0$: $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x+x^2}$.

On pose $U_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

1.a) Montrer que pour tout entier naturel supérieur à 0, les courbes C_n passent par deux points fixes que l'on déterminera.

b) Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+1} pour $n>0$.

2.a) Justifier l'existence de U_n sans le calculer.

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est décroissante et interpréter graphiquement.

c) Montrer que pour tout $n>0$: $\frac{1}{3(n+1)}\le U_n\le\frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que:

Pour tout $n>0$, $U_n=\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\varphi(x)dx$ où: $\varphi(x)=\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$.

4.a) En utilisant les variations de la fonction φ sur l'intervalle [0,1], montrer que pour tout entier naturel n: $1+\frac{1}{n+2}\le 3(n+1)U_n\le 1+\frac{3}{n+2}$.

b) En déduire que: $\lim\limits_{n\to+\infty} 3nU_n=1$.

Fin.