ECOLES PRIVEES
ELMAARIF- ERRAJA

مدارس
الرجاء والمعارف الحرة

DEVOIR DE MATHS

Classes :7C | Durée : 4H | 27/11/2016

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (3 points)

On considère le système linéaire S_a où a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ x - y + (a-1)z = 3(a-1) \\ x - (a-1)y - z = -2 \end{cases}$$

1) Résoudre le système S_5 (pour $a=5$).

2) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'ensemble des solutions du système linéaire S_a.

Exercice 2 (3 points)

Soit $z = e^{i\frac{\pi}{2017}}$. On pose $S = 1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2016}$.

1) Calculer z^{2017} et montrer que $S = \dfrac{1}{1-z}$.

2) Ecrire S sous forme algébrique.

3) En déduire que : $\cos\dfrac{2\pi}{2017} + \cos\dfrac{4\pi}{2017} + ... + \cos\dfrac{2016\pi}{2017} = \dfrac{-1}{2}$.

Exercice 3 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

E_α $\qquad z^2 - 2iz\cos\alpha - 1 = 0$ où α est un paramètre réel.

On note z_1 et z_2 les solutions de E_α avec $Re(z_1) \geq 0$ si $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1) Résoudre l'équation E_α et donner les solutions sous formes algébrique et exponentielle.

2) On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Soit Ω le milieu du segment $[M_1M_2]$.

a) Montrer que lorsque α décrit $\mathbb{R}$, les points M_1 et M_2 sont situés sur un cercle que l'on déterminera.

b) Montrer que si $M_1 \neq M_2$, la droite (M_1M_2) a une direction fixe que l'on précisera.

c) Déterminer le lieu géométrique de Ω lorsque α décrit $\mathbb{R}$.

d) Pour une valeur donnée de α dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donner une construction des points M_1, M_2 et Ω.

3.a) Résoudre l'équation $z^n = e^{i\theta}$ où θ est un paramètre réel. .

b) En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2iz^n\cos\alpha - 1 = 0 \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \text{ donné.}$$

<u>Exercice 4 (5 points)</u>

1) Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z)=z^3-(3+4i)z^2+(-5+12i)z+15$.

a) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

On note z_0 , z_1 et z_2 ces solutions avec $Re(z_0)>Re(z_1)>Re(z_2)$.

2) On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et on note A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . Soit Ω le milieu du segment $[AB]$. Soit f l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que $z'=\dfrac{2iz+5}{z-2i}$. On note $f(M)=M'$.

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b) Montrer que les points A,B,M,M' sont cocycliques ou alignés.

3 .a) Montrer que $(z'-2i)(z-2i)=1$. En déduire que $\Omega M\times\Omega M'=1$.

b) Montrer que $(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M})+(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M'})=0\quad[2\pi]$. En déduire une construction géométrique (justifiée) du point M' à partir d'une position donnée du point M non situé sur la droite (AB).

4.a) Déterminer le lieu géométrique Γ_1 du point M' lorsque M décrit le cercle de centre Ω et de rayon 1.

b) Déterminer le lieu géométrique Γ_2 du point M lorsque M' décrit l'axe des ordonnées privé de Ω.

c) Que peut on dire des ensembles Γ_1 et Γ_2 ?

d) Déterminer le lieu géométrique Γ_3 du point M lorsque M' décrit le cercle de centre O et de rayon 2.

<u>Exercice 5 (5 points)</u>

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=(\frac{1}{2}+ai)z+1-2ai,\qquad a\in\mathbb{C}$$

1) Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

a) $a=-\frac{1}{2}i$ b) $a=\frac{5}{2}i$ c) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $a=\frac{1}{2}$

2) Dans la suite de l'exercice on suppose que $a\in\mathbb{R}$ et on note $\theta=\arg(\frac{1}{2}+ai)$. Soit les points $M_0(3;0)$ et $\Omega(2;0)$. Pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$ on pose $M_{n+1}=f_a(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a) Calculer et écrire sous forme algébrique : z_1 et z_2 en fonction de a.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $z_n=2+\left(\dfrac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose : $V_n=|z_n-2|$. Pour quelles valeurs de θ ; la suite (V_n) est elle convergente ?

d) Calculer en fonction de n : $d_n=\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}d_k$.

Fin.