Devoir de Mathématiques

Classes :7D **Durée : 4H** **13/02/2015**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

Exercice 1 (3 points)

Dans cet exercice, six affirmations sont proposées. Pour chacune d'elles, répondre par VRAI ou FAUX. Justifier.

Pour toute fonction *f* continue sur [0 ; 1], à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a :

1. Si $f(0)=2$ et $f(1)=-5$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $x_0\in[0,1]$.

2. Si $x_0\in[0,1]$, alors f est dérivable en x_0.

3. Si *f* est dérivable sur [0 ; 1], avec $f'(x)>0$, alors f réalise une bijection de $[0\ ,\ 1]$ sur son image.

4. Si $f(0)=2$ et $f(1)=1$ alors l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans $[0\ ,\ 1]$.

5. Si $f(0)=-1$ et $f(1)=2$ alors il existe $\alpha\in[0\ ;\ 1]$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.

6. Si *f* est strictement décroissante sur [0 ; 1], alors f réalise une bijection de $[0\ ,\ 1]$ sur son image.

Exercice 2 (5 points)

1. On pose $P(z)=z^3-5z^2+8z-6$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(3)$.

b) Déterminer a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a: $P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z)=0$.

2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A , B et C d'affixes respectives : $z_1=3$, $z_2=1+i$ et $z_3=1-i$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

b) Placer les points A , B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

c) Ecrire le nombre $\frac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OBC.

3. On pose pour tout $z\neq 1+i$, $f(z)=\frac{iz}{z-1-i}$. Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)|=1$.

b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel.

d) Γ_4 tel que $|f(z)-i|=1$.

4) Soit M_1 ; M_n les points d'affixes respectives z_3 et $Z_n=z_3^n$; $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Ecrire Z_n sous forme trigonométrique.

b) Déterminer et représenter dans le plan les points M_1 ; M_2 ; M_3.

c) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle isocèle en M_1.

5.a) Pour quelles valeurs de n ; le point M_n est situé sur l'axe Oy?

b) Montrer que les points O ; M_6 ; M_{2014} sont alignés.

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout $n>0$ par:

$$U_1 = 2; \quad U_{n+1} = \frac{n}{3(n+1)}U_n + \frac{10n+15}{3(n+1)};$$

1) Calculer U_2 , U_3.

2) Montrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 5.

3) Déterminer le sens de variation de (U_n) ; démontrer qu'elle converge puis déterminer sa limite.

4) Pour tout $n>0$ on pose $V_n = (5-U_n)n$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique ; écrire V_n en fonction de n.

b) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et calculer $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$.

c) Calculer $S'_n = U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \cdots + nU_n$.

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les réels a ;b et c tel que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$ pour tout $x \in D_f$.

2) Dresser le tableau de variations de f . Justifier que la courbe C n'admet pas de tangentes horizontales.
3) Montrer que C admet deux asymptotes et que leur point d'intersection est un centre de symétrie de C.
4) Etudier les positions relatives de C et son asymptote oblique.
5) Préciser les points d'intersections de C avec les axes.
6) On considère la droite D d'équation $5x-4y-1=0$.
Existe-t-il des points de C où la tangente est parallèle à D ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.
7) Tracer la courbe C.
8) En déduire la construction , dans des nouveaux repères, des courbes C' et C'' représentatives des fonctions g et h telles que : $g(x) = -f(x)$; $h(x) = |f(x)|$. Expliquer la méthode de construction.

9) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x^2 + (4-m)x + 3 - 2m = 0$. Retrouver ces résultats algébriquement.

Fin.