Classes :7D	**Devoir de Mathématiques**	Durée : 4H	13/11/2016

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

Exercice 1 (3 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner (sans justification), la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	La forme algébrique de $\frac{23-2i}{4+5i}$ est	$2-3i$	$2+3i$	$\frac{23}{4}-\frac{2}{5}i$	$\frac{23}{41}-\frac{2}{41}i$
2	Le module de $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{3-3i}$ est	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
3	Si $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z, alors un argument de $(1+i)z^3$ est	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
4	Si $z=-1+2e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors la forme exponentielle de z est	$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$-2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$	$4ie^{i\frac{\pi}{3}}$	$1+e^{i\frac{\pi}{3}}$
5	Si $z-\overline{z}=14i$, alors	$\mathrm{Im}(z)=14$	$\mathrm{Im}(z)=-7i$	$\mathrm{Im}(z)=7i$	$\mathrm{Im}(z)=7$
6	Si $A=\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}$, alors	$A=3\cos x$	$A=\cos 3x$	$A=(\cos x)^3$	$A=\sin 3x$

Exercice 2 (5 points)

1) On pose $a=2\sqrt{2}$ et $b=2\sqrt{3}$.
a) Calculer a^2 et b^2.
b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(2\sqrt{2})z+4=0$.
c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2-(2\sqrt{3})z+4=0$.
2.a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres $u=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $v=\sqrt{3}+i$ et $w=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}$.
b) Ecrire w sous forme algébrique.
c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2z+10=0$. On note z_1 et z_2 les solutions de (E) .

2) Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1-3i$, $z_B=z_1+z_2+2$ et $z_C=z_A+6i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Placer D.

3) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-6z^2+18z-40$.

a) Calculer $P(4)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z)=(z-4)(z^2+az+b)$.

c) En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Exercice 4 (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère les nombres : $z_1=\dfrac{9-i}{4-5i}$, $z_2=(1+i)^2$ et $z_3=\dfrac{8+2i}{3+5i}$.

a) Donner la forme algébrique de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

b) Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

2) Pour tout nombre $z\neq 2i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-1-i}{z-2i}$.

a) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+i$, $z_B=2i$ et $z_C=-2-2i$

b) Calculer que $f(z_C)$.

3.a) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

b) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

c) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{2}$.

d) Déterminer et construire Γ_4 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left|f\left(\bar{z}\right)\right|=1$.

4) Justifier les affirmations suivantes :

a) Le nombre $(z_A)^{2016}$ est un réel positif.

b) Le nombre $(z_B)^{2017}$ est imaginaire pur.

Présentation : 1 point

Fin.