Bac Blanc

Classes :7D **Epreuve de Mathématiques** Durée : 4H 26/12/2013

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

Exercice 1 (3 points) ; A ou B au choix

Dans chacun des énoncés suivants : A (nombres complexes) et B (fonctions), six affirmations sont proposées. Pour chacune d'elles, répondre par VRAI ou FAUX. On ne demande pas de justifications.

***Barème** :Bonne réponse (+0,5) point. Mauvaise réponse (-0,25) point. Pas de réponse (0) point. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.*

A. Soit z un nombre complexe non nul.

1. Si $|z|=1$, alors $z=\bar{z}$.

2. Si $z=\bar{z}$, alors z est réel.

3. Si $|z|=1$, alors $\bar{z}=\frac{1}{z}$.

4. Si $\arg z=\pm\frac{\pi}{2}$, alors z est réel.

5. Si z est imaginaire pur, alors z^2 est réel.

6. Si $z+\bar{z}=0$, alors z^2 est réel négatif.

B. Pour toute fonction *f* continue sur [0 ; 1], à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a :

1. Si $f(0)=-1$ et $f(1)=1$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $x_0\in[0,1]$.

2. Si *f* est croissante sur [0 ; 1], alors f réalise une bijection de $[0\ ,\ 1]$ sur son image.

3. Si $f(0)=2$ et $f(1)=1$ alors l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans $[0\ ,\ 1]$.

4. Si *f* est dérivable sur [0 ; 1], avec $f'(x)>0$, alors f réalise une bijection de $[0\ ,\ 1]$ sur son image..

5. Si $f(0)=-1$ et $f(1)=2$ alors il existe $\alpha\in$ [0 ; 1] tel que $f(\alpha)=\alpha$.

6. Si $x_0\in[0,1]$, alors f est dérivable en x_0

Exercice 2 (5 points)

1. On pose $P(z)=z^3-8z^2+30z-36$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(2)$.

b) Déterminer a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a: $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z)=0$.

2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A , B et C d'affixes respectives : $z_1=2$, $z_2=3+3i$ et $z_3=3-3i$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

b) Placer les points A , B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

c) Ecrire le nombre $\frac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OBC.

3. **On pose pour tout $z \neq 3+3i$, $f(z)=\dfrac{iz}{z-3-3i}$. Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :**

a) Γ_1 tel que $|f(z)|=1$.

b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel.

d) Γ_4 tel que $|f(z)-i|=\sqrt{2}$.

<u>Exercice 3 (6 points)</u>

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies pour tout n de IN^* par:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{n+1}{5n}U_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad V_n = \frac{1}{n}U_n .$$

1.a) Calculer U_2, U_3, V_1, V_2

b) Montrer que (U_n) est positive.

c) Montrer que (U_n) est décroissante et bornée. Que peut-on déduire ?

2.a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique convergente.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. Recalculer alors U_2 et U_3.

3.a) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \dfrac{U_1}{1}+\dfrac{U_2}{2}+\dfrac{U_3}{3}+\cdots+\dfrac{U_n}{n}$.

b) Soit $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ... \times V_n$. Montrer que $P_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

c) Soit $Q_n = U_1 \times U_2 \times U_3 \times ... \times U_n$. Calculer Q_n en fonction de n.

<u>Exercice 4 (6 points)</u>

1) On pose pour tout nombre complexe $z \neq -6$, $f(z)=\dfrac{8z+3}{z+6}$.

a) Donner la forme algébrique des nombres : $z_1 = f(2i)$, $z_2 = f(3-2i)$, $z_3 = f(\frac{1}{2})$

b) Résoudre l'équation $f(z)=z$

2) On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{8u_n+3}{u_n+6}$.

a) Calculer les valeurs exactes des termes u_1, u_2 et u_3.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier n non nul, $1 < u_n < 3$.

c) Montrer que (u_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

3) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite (v_n) par : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont précisera la raison et le premier terme v_0.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Fin.