ECOLES PRIVEES
ELMAARIF- ERRAJA

مدارس
الرجاء والمعارف الحرة

Bac Blanc

Classes :7D — **Epreuve de Mathématiques** — **Durée : 4H** — **27/03/2015**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

Exercice 1 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on pose : $P(z)=z^3+2z^2-16$.

On note z_A, z_B et z_D les solutions de l'équation $P(z)=0$, tels que $\operatorname{Im} z_A < \operatorname{Im} z_B < \operatorname{Im} z_D$.

Le point C est tel que ABCD soit un parallélogramme. Le point E a pour affixe $z_E=6$.

Γ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left|\dfrac{z-2}{z+2+2i}\right|=1$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, avec justification, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	On a	$P(2)=0$	$P(2i)=0$	$P(-2)=0$	$P(i)=0$
2	La forme algébrique de z_A est	$z_A=-2-i$	$z_A=1-2i$	$z_A=-2-2i$	$z_A=-2+2i$
3	La forme exponentielle de z_D est	$z_D=2i\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$	$z_D=-2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	$z_D=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$	$z_D=2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
4	L'affixe z_C du point C est	$z_C=-2-4i$	$z_C=2+4i$	$z_C=7-2i$	$z_C=4i$
5	L'ensemble Γ est le/la…	médiatrice de [AD]	médiatrice de [AB]	cercle de diamètre [AB]	droite (AB)
6	Le triangle EBC est	non isocèle	non rectangle	Equilatéral	rectangle isocèle

Exercice 2 (4 points)

On considère la suite (U_n) définie par $U_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=\dfrac{1}{3}U_n+n-2$.

1) Calculer U_1, U_2 et vérifier que $U_3=-\dfrac{14}{27}$.

2. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n\geq 4$, $U_n\geq 0$.

b) Montrer que pour tout entier $n\geq 5$, $U_n\geq n-3$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) On définit la suite (V_n) pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, par $V_n=-2U_n+3n-\dfrac{21}{2}$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique et donner son terme général en fonction de n.

b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=\dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{2}n-\dfrac{21}{4}$.

c) Calculer la somme $S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n$ en fonction de n.

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $D=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,+\infty\right[$ par : $f(x)=\ln(x^2+x)$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2cm.

1.a) Calculer les limites suivantes: $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ puis les interpréter graphiquement.

b) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur D. Dresser le tableau de variations de f.

3) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C).

4) Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses puis construire (C).

5.a) En utilisant une intégration par parties, calculer les deux nombres: $I=\int_1^e \ln x dx$ et $J=\int_1^e \ln(x+1)dx$.

b) Calculer l'aire, en cm^2, de la surface plane délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respective $x=1$ et $x=e$.

Exercice 4 (8 points)

Partie A

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x)=x\ln x - x+1, & x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$

1.a) Montrer que g est continue à droite de 0.
b) Etudier la dérivabilité de g à droite de 0. Interpréter graphiquement.
c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2.a) Calculer $g'(x)$ pour $x>0$ et dresser le tableau de variation de g.
b) En déduire que $g(x)>0$ pour tout $x>0$.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$.

1.a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+$. Interpréter graphiquement.
c) Montrer que f admet un prolongement par continuité au point $x_0=1$. Déterminer son prolongement.

2.a) Montrer que $f'(x)=\frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution unique α et que $3.5<\alpha<3.6$.

c) Tracer la courbe de f.

3) Soit h la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $h(x)=\ln x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

a) Vérifier que $h(\alpha)=\alpha$.
b) Etudier les variations de h.
c) On pose $I=[3,4]$. Montrer que si $x\in I$ alors $h(x)\in I$ et $|h'(x)|\le\frac{5}{6}$.

4) On définit la suite (u_n) par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=h(u_n)$.
a) Vérifier que $\alpha\in I$ et montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I$.

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{5}{6}|u_n-\alpha|$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, : $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{5}{6}\right)^n$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.

Fin.