

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (3 points)

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci –après une seule réponse est exacte

NO	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La suite de terme général $U_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n$ est :	Décroissante	Croissante	Convergente
2	$Z = \sqrt{3} + i$ alors $\arg(iZ^3)$ est :	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
3	$Z = \frac{6-4i}{5+i}$ alors $ Z ^3$ est :	4	$\sqrt{8}$	$4\sqrt{2}$
$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = U_n - 1$				
4	La suite (V_n) est une suite :	Arithmétique	Géométrique	Ni géométrique ni arithmétique
5	Le terme général de (U_n) est :	$U_n = 1 + 3^n$	$U_n = 2 \times 3^n$	$U_n = 2n + 1$
6	La suite (W_n) définie par $W_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite	Croissante	Décroissante	Non monotone

Exercice 2 (5 points)

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{U_n}{2+U_n}$

- Calculer U_1 , U_2 et U_3
- Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique
- Montrer que : $\forall n \geq 0 \quad U_n > 0$
- Montrer que (U_n) est décroissante
- En déduire que (U_n) est convergente

2) Soit la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \frac{U_n}{1+U_n}$

- Calculer V_0 et montrer que (V_n) est une suite géométrique préciser sa raison q
- Calculer V_n en fonction de n
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}$

3) Soit la suite (W_n) définie par : $W_0 = 0$ et $W_{n+1} = W_n + V_n$

- Montrer que $W_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$
- En déduire que : $W_n = \frac{1}{2^n} - 1$

Exercice 3 (8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (4-2i)z^2 + (4-6i)z - 4 + 8i$

a) calculer les racines carrées de : $-8i$

b) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire notée z_0 à déterminer

c) Déterminer les nombres a et b tels que $P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$

d) Résoudre : $P(z) = 0$

2) Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = 1 + i$, $Z_B = -2i$, $Z_C = 3 - i$

et soit l'application : $f(z) = \frac{z-1-i}{z+2i}$

a) Placer les points A, B et C

b) Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme

c) Calculer $Z_E = f(2 - i)$ quelle est la nature du triangle ABE ?

3) Déterminer et représenter les ensembles suivants :

a) Ensemble Γ_1 des points M d'affixe z tel que : $f(z)$ réel

b) l'ensemble Γ_2 des points M tels que : $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$

4) Pour tout entier naturel n on appelle M_n le point d'affixe $(Z_A)^n$

a) Déterminer n pour que $M_n \in (oy)$

b) Vérifier que $M_{2018} \in (oy)$

Exercice 4 (4 points)

On définit dans \mathbb{C} la suite (Z_n) par : $Z_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad Z_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})Z_n$, M_n désigne le point d'affixe Z_n dans un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v})

1) a) Calculer Z_1, Z_2 et Z_3 puis placer les points M_1, M_2 et M_3

b) Donner la forme exponentielle de : $\alpha = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})$

c) Montrer que $Z_n = \frac{1}{2^{n-3}} e^{\frac{in}{3}}$

2) Calculer $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$, puis en déduire que le triangle $OM_n M_{n+1}$ est un triangle rectangle

3) On pose $V_n = |Z_{n+1} - Z_n|$

a) donner une interprétation géométrique de V_n

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

c) on pose : $S_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$ calculer S_n en fonction de n

Fin.