Exercices de révision de Maths

Nombres complexes & arithmétique **7C** **12.2016**

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z)=z^3-(4-2i)z^2+(4-6i)z-4+8i$

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z+2i)(z^2+az+b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2. Soient A , B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.

a) Placer les points A , B et C .

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$.

c) Donner l'expression complexe de la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

3. On pose $Z=\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$ Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $\arg Z=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ b) $2\arg Z=2(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\ [2\pi]$ c) $|Z|=2$

EXERCICE 2

θ étant un réel, on donne l'équation E dans $\mathbb{C}$: $z^2-(1+i\cos 2\theta)z+\dfrac{1}{2}i\cos 2\theta=0$ où $\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

1) Résoudre cette équation. Préciser le cas des racines doubles.

2) Soient M' et M'' les points images des solutions z' et z'' de E, I le milieu de [M'M''].

a) Déterminer le lieu géométrique de I lorsque θ décrit $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que les points M' et M'' appartiennent a un cercle dont on déterminera le rayon et le centre.

c) Montrer que si M' et M'' sont distincts, alors la droite (M'M'') admet une direction fixe indépendante de θ.

d) En déduire une construction de M',M'' et I pour une valeur donnée de θ.

EXERCICE 3

Soit f l'application de $E=C\setminus\{-i\}$ dans $F=C\setminus\{i\}$ qui à tout z associe $z'=f(z)=\dfrac{iz}{z+i}$.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on note M et M' les points d'affixes z et z' respectivement.

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $|f(z)|=2$ b) $|f(z)-i|=2$ c) $f(z)$ est imaginaire pur d) $\arg f(z)=\dfrac{\pi}{3}\ [\pi]$.

2) Dans cette question on suppose que M décrit le cercle Γ de centre $\Omega(0,-1)$ et de rayon r ou r>0 .

a) Montrer que $(z'-i)(z+i)=1$, en déduire le lieu géométrique Γ' du point M'.

b) Construire Γ et Γ' dans le cas où $r=1$. Que peut on dire de Γ et Γ' ?

c) Dans le cas où $r=1$; à partir d'une position donnée de M sur Γ; distinct de O, donner une construction de M'. Justifier.
3) Montrer que f est une bijection, donner sa bijection réciproque; puis vérifier que : $\forall z \in F,\quad f^{-1}(z) = -f(-z)$.

4) Démontrer que, si $f(z) = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$, alors $z = \frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) - i\right)$.

5) Déduire de ce qui précède une méthode de résolution de l'équation : $(iz)^5 = 16(1+i\sqrt{3})(z+i)^5$.

<u>EXERCICE 4</u>
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).
On désigne par A le point d'affixe i.
À tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{-z^2}{z-i}$$. **On note f(M)=M'.**

1.a) Déterminer les points M confondus avec leur image M'.
b) Montrer qu'ils existent deux points dont l'image est A. Déterminer leurs affixes.
c) Soit Δ l'axe des imaginaires purs; montrer que pour tout point M de Δ distinct de A, M' appartient à Δ.
2) Étant donné un complexe z distinct de i, on pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' réels.
Montrer que : $x' = \frac{-x(x^2+y^2-2y)}{x^2+(1-y)^2}$.
En déduire l'ensemble E des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble E.
3) Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM'. En déduire l'ensemble F des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner F sur la figure précédente.
4) Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. M'=f(M), et G le centre de gravité du triangle AMM'.
a) Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z.
Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
b) Après avoir comparé les angles $(\vec{u};\overrightarrow{OG})$ et $(\vec{u};\overrightarrow{AM})$, effectuer la construction de G a partir d'une position donnée de M. En déduire celle de M'.
5) Dans cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle trigonométrique). Montrer que M' est situé à l'extérieur d'un disque de centre O dont on précisera le rayon.

<u>EXERCICE 5</u>
On considère un triangle ABC de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles ACQ, BAR et CBP rectangle et isocèle respectivement en A, B et C. Soient P', Q' et R' les milieux respectifs des segments $[BP]$, $[CQ]$ et $[AR]$.
L'objectif de cette partie est de montrer que les triangles ABC, PQR et $P'Q'R'$ sont de même centre de gravité. On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient a, b, c, p, q, r, p', q' et r' les affixes respectives des points A, B, C, P, Q, R, P', Q' et R'.
1. Faire une construction illustrant les données précédentes.
2.a) Montrer que $p' = \frac{b-ic}{1-i}$ puis écrire q' en fonction de a et c ; r' en fonction de a et b.

b) Calculer $p'+q'+r'$ en fonction de a, b et c puis en déduire que les triangles ABC et $P'Q'R'$ ont le même centre de gravité G d'affixe g.
3. Exprimer chacun des complexes p, q et r en fonction de a, b et c puis montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité G.

EXERCICE 6

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose:

$$P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-16+20i)z + 24 + 8i.$$

1.a) Calculer $P(2i)$.
b) Déterminer les complexes α et β tels que pour tout complexe z on a:
$P(z) = (z-2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$ puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.
2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2+2i$ et $z_B = 2i$ et le cercle Γ de diamètre $[OA]$.
Soit M un point variable appartenant au cercle Γ et distinct des points O et A. On considère les deux triangles AEM et OMF directs, isocèles et rectangles respectivement en A et en O. On désigne par G le centre de gravité du triangle OAM et on appelle e, f, g et m les affixes respectives des points E, F, G et M.
a) Construire une figure et démontrer que, quelque soit le point M choisi sur le cercle Γ, on a $|m-1-i| = \sqrt{2}$.
b) Écrire en fonction de m chacun des nombres complexes e, f et g.
c) Démontrer que le milieu H du segment $[EF]$ est un point de Γ indépendant de la position du point M sur Γ.
d) Déterminer et représenter les lieux géométriques des points E, F et G lorsque M décrit Γ.
e) Préciser la position de M pour laquelle la droite (EF) est tangente au cercle Γ. Déterminer alors l'affixe du point E.

EXERCICE 7

Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $E(\theta)$ l'équation : $z^2 - (3+i)ze^{i\theta} + 2(1+i)e^{2i\theta} = 0$.
1° a) Résoudre $E(\theta)$, on note z' et z'' les solutions telles que $|z'| > |z''|$.
b) Mettre sous forme exponentielle le nombre z''.
2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les ponts A,B,C d'affixes respectives $2e^{i\theta}, (1+i)e^{i\theta}, ie^{i\theta}$.
a) Montrer que les droites $(OA),(OC)$ d'une part et $(BO),(BA)$ d'autre part sont perpendiculaires.
b) Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, placer les points A,B,C.
c) Montrer que $OABC$ est un trapèze rectangle.
d) Montrer que l'aire du quadrilatère $OABC$ est indépendante de θ.

EXERCICE 8

1) Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 7.
2) Trouvez le reste de la division euclidienne de 2013^{2013} par 7.
3) Montrez que pour tout entier naturel n, $2008^{2n+1} + 2010^n$ est divisible par 7.

EXERCICE 9

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
1. Vérifier que le couple (13, 3) est solution de cette équation.

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, *a* désigne un entier naturel et les nombres *c* et *g* sont des entiers naturels vérifiant la relation 25*g* – 108*c* =1.

On rappelle le petit théorème de Fermat : *si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors* a^{p-1} *est congru à 1 modulo p, ce que l'on note* $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

1. Soit *x* un entier naturel.

Démontrer que si $x \equiv a[7]$ et $x \equiv a[19]$ alors $x \equiv a[133]$.

2. a. On suppose que *a* n'est pas un multiple de 7.

Démontrer que $a^6 \equiv 1[7]$ puis que $a^{108} \equiv 1[7]$. En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.

b. On suppose que *a* est un multiple de 7. Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.

c. On admet que pour tout entier naturel *a*, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[19]$. Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[133]$.

EXERCICE 10

1.a)Déterminer l'ensemble A des entiers relatifs n tels que n+2 divise 5

b) Déterminer l'ensemble B des entiers relatifs n tels que n+2 divise $2n-1$.

2) Montrer que pour tout entier relatif n, les nombres n+2 et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.

3) Déterminer l'ensemble C des entiers relatifs n, $n \neq -2$, tels que $\dfrac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

EXERCICE 11

1. On considère l'équation (E) : 8*x*+ 5*y* = 1, où (*x* ; *y*) est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit *N* un nombre naturel tel qu'il existe un couple (*a* ; *b*) de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$.

a. Montrer que le couple (*a* ; *b*) est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de *N* par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation 8*x* + 5*y* = 100, où (*x* ; *y*) est un couple de nombres entiers relatifs.

EXERCICE 12

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7. On pose $n = p^4 - 1$.

1° a) Montrer que l'on a : $p \equiv 1\ [3]$ ou $p \equiv -1\ [3]$.

b) En déduire que n est divisible par 3.

2° a) Vérifier que p est impair. En justifier qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2-1 = 4k(k+1)$.

b) En déduire que n est divisible par 16.

3° a) Quel sont les restes possibles de p modulo 5 ?

b) En déduire que 5 divise n.

c) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que si a et b divisent c alors ab divise c.

d) En déduire que 240 divise n.

EXERCICE 13

1. Résolution d'une équation

On considère l'équation (1) : $11n - 24m = 1$ d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
2. Recherche du PGCD de $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$
a. Justifier que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.
b. Soit (n, m) un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1). Montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9.$$

c. Montrer que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ divise 9.
e. Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$.

EXERCICE 14

On considère l'équation (E) : $5x-3y=17$, où x et y sont des entiers relatifs.
1.a) Justifier que l'équation (E) admet des solutions entières et vérifier que le couple $(4,1)$ est une solution particulière de (E).
b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
2) Soit (x,y) une solution de (E).
a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.
b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ soit un entier relatif.

EXERCICE 15

1) On considère dans Z^2 l'équation (E) : $6x + 11y = 2013$.
a. Montrer que pour tout couple (x, y) solution de (E), x est un multiple de 11 et y un multiple de 3.
b. Déterminer une solution particulière de (E).
c. Résoudre (E).
2) On désigne par d le PGCD de x et y où (x,y) est une solution de (E).
a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?
b) Déterminer, s'ils existent, les couples (p, q) d'entiers naturels tels que 6m + 11d = 2013, où d désigne le pgcd de p et q, et m leur ppcm.

EXERCICE 16

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit S la transformation du plan qui, à tout M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que : $z'=5iz+6i+4$.

Partie A

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de la transformation S.
2. On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z'.
Démontrer que : $\begin{cases} x'=-5y+4 \\ y'=5x+6 \end{cases}$.

Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que $-3\le x\le 5$ et $-3\le y\le 5$. On note E l'ensemble de ces points M.
1. a. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(a\,;b)$ tels que $4a+3b=5$.
b. En déduire l'ensemble des points M de E de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $-3x'+4y'=37$.
2. Soit M un point de l'ensemble E et M′ son image par la transformation S.
a. Démontrer que $x'+y'$ est un multiple de 5.
b. Démontrer que $x'-y'$ et $x'+y'$ sont congrus modulo 2.
En déduire que si $x'^2-y'^2$ est multiple de 2 alors $x'-y'$ et $x'+y'$ le sont également.
c. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que : $x'^2-y'^2=20$.