Exercices de révision de Maths

Nombres complexes & suites numériques **7D** **12.2016**

<u>Dans les exercices 1 à 4,</u> pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.

<u>EXERCICE 1</u>

Soit z un nombre complexe non nul.

1. Si $\lvert z\rvert = 1$, alors $z^2 = \left(\overline{z}\right)^2$.	4. Si $\arg z = \pm\frac{\pi}{2}$, alors z est imaginaire pur.
2. Si $z = -2ie^{i\frac{\pi}{3}}$, alors $\arg z = \pi + \frac{\pi}{3}$.	5. Si $z = 5 + i(4-3i)$, alors la partie réelle de z est 5
3. Si $z = 3(\sin\theta + i\cos\theta)$, alors $z = 3e^{i\theta}$	6. Si $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = -5\,e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_3 = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$, alors le produit $z_1z_2z_3$ est réel négatif.

<u>EXERCICE 2</u>

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **définie par** $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ **et, pour tout** $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **par** $v_n = u_{n+1} - u_n$ **et** $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

1. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.	3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.
2. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.	4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite finie.

<u>EXERCICE 3</u>

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \in]0\,;+\infty[$.
On note $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

1. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2000$, alors $q > 1$.	4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$, alors $q = \frac{1}{2}$.
2. Si $q < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 2$.	5. Si $q = 2$, alors $S_4 = 15$.
3. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.	6. Si $q = 0{,}5$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$.

<u>EXERCICE 4</u>

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, croissante et de termes strictement positifs.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-1}{u_n}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (v_n) est convergente.	5. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) est divergente.	6. La suite (v_n) est croissante et négative.
3. Si (u_n) est minorée par 5, alors (v_n) est minorée par -1.	7. Si (u_n) est arithmétique, alors (v_n) est arithmétique.
4. Si (u_n) est géométrique, alors (v_n) est géométrique.	8. La suite (u_n) est minorée .

EXERCICE 5

1) On considère les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

$$E_1 : \quad z^2 - 6z + 25 = 0$$

$$E_2 : \quad z^2 - 8z + 25 = 0$$

a) Résoudre E_1. On note z_1 et z_2 ses solutions avec $Im(z_1) > 0$.

b Résoudre E_2. On note z_3 et z_4 ses solutions avec $Im(z_3) > 0$.

c) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres $z_1 + z_3$ et $z_1 \times z_3$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 3+4i$ on pose : $f(z) = \dfrac{z-4-3i}{z-3-4i}$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 3+4i$, $z_B = 4+3i$ et $z_C = 4+4i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère.

b) Calculer et mettre sous forme algébrique le nombre complexe $f(4+4i)$. Interpréter graphiquement.

c) Déterminer et représenter, dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, les ensembles de points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$.

Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

EXERCICE 6

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$.

a) Calculer $P(3)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $\quad P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B , C et D d'affixes respectives $z_A = 3+2i$, $z_B = -1+i$, $z_C = -1-i$ et $z_D = 3$.

a) Placer les points A, B , C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Comparer l'affixe du milieu de $[AC]$ à celle du milieu de $[BD]$.

c) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-3| = |z+1-i|$.

EXERCICE 7

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - 10z^2 + 33z - 34$.

a) Calculer $P(2)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $\quad P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z) = 0$. On note z_0 ; z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que $Im(z_2) < Im(z_0) < Im(z_1)$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = z_1 + 3i$, $z_B = z_2 + i$ et $z_C = 6+2i$.

a) Vérifier que $z_A = 4+4i$ et $z_B = 4$.

b) Ecrire les nombres z_A et z_B sous forme trigonométrique.

c) Placer les points A, B et C dans le repère.

3) Pour tout nombre $z \neq 4+4i$ on pose : $f(z) = \dfrac{z-4}{z-4-4i}$.

a) Vérifier que $f(z_C) = i$ et interpréter graphiquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n=(z_A)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n.

a) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n > 2015$.

EXERCICE 8

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ on pose : $P(z)=\dfrac{z-1+6i}{z+4-i}$.

1) Calculer puis écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants:
$P(-1)$; $P(3+6i)$; $P(-4+3i)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z)=1-i$; écrire la solution sous forme algébrique .

3) On pose $Z=P(3+6i)$. On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit M_1 ; M_n les points d'affixes respectives Z et Z^n ; $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $Z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

b) Ecrire Z^n sous forme trigonométrique.

c) Déterminer et représenter dans le plan les points M_1 ; M_2 ; M_3.

4) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle isocèle en M_1.

5.a) Pour quelles valeurs de n ; le point M_n est situé sur l'axe Ox?

b) Montrer que les points O ; M_4 ; M_{2008} sont alignés.

6) On pose $U_n=|z_{n+1}-z_n|$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.

7) On pose $S_n=M_1M_2+M_2M_3+...+M_nM_{n+1}$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

7) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) Γ_1 $|P(z)|=1$. b) Γ_2 Le nombre $P(z)$ est réel.

EXERCICE 9

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier $n\geq 1$ par : $U_n=\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}$.

1.a) Calculer U_1 , U_2 et U_3.

b) Justifier que la suite (U_n) :

1)N'est pas arithmétique ; 2) N'est pas géométrique ; 3)Est convergente.

2. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose : $V_n=\dfrac{n^2-1}{n}$.

a) Montrer que : $U_n=V_{n+1}-V_n$

b) En déduire l'expression de la somme $S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$ en fonction de n.

EXERCICE 10

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par:

$$\begin{cases} U_1=1 \\ U_{n+1}=\dfrac{n+1}{5n}U_n \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n=\frac{1}{n}U_n.$$

1.a) Calculer U_2 , U_3, V_1, V_2

b) Montrer que (U_n) est positive.

c) Montrer que (U_n) est décroissante et bornée. Que peut-on déduire ?

2.a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique convergente.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. Recalculer alors U_2 et U_3.

3.a) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \cdots + \frac{U_n}{n}$.

b) Soit $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ... \times V_n$. Montrer que $P_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

c) Soit $Q_n = U_1 \times U_2 \times U_3 \times ... \times U_n$. Calculer Q_n en fonction de n.

EXERCICE 11

On considère la suite numérique (U_n) définie par tout n de IN^* par: $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$

1.a) Calculer U_1, U_2 .

b) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout *n* , $0 \leq U_n < 2$

2) On considère la suite (V_n) définie pour tout *n* par $V_n = 2 - U_n$

a) Montrer que, pour tout entier *n*, $0 < \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$. En déduire le sens de variation de (V_n) puis celui de (U_n).

b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence montrer que $0 < V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c) En déduire la limite de la suite (V_n) puis celle de la suite (U_n).

EXERCICE 12

On considère la suite numérique (U_n) définie par: $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = 3 - \frac{2n}{3(n+1)}(3 - U_n), \ \forall n \in IN^* \end{cases}$

1) Vérifier que $U_2 = \frac{7}{3}$ puis calculer U_3 ; U_4.

2) On admet que la suite (U_n) est majorée par 3 (a démontrer facilement par récurrence).

a) Montrer que pour tout n de IN^* on a : $U_{n+1} - U_n = \frac{n+3}{3(n+1)}(3 - U_n)$.

b) Déduire le sens de variation de la suite (U_n). Puis que la suite (U_n) est convergente.

3) On pose pour tout n de IN^* : $V_n = n(3 - U_n)$.

a) Calculer $V_1; V_2$ et montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Montrer que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite. En déduire la limite de (U_n).

d) Calculer par une deuxième méthode la limite de (U_n).

4) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \cdots + nU_n$.

EXERCICE 13

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$; $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.
5. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

EXERCICE 14

On définit la suite numérique de terme général: $U_n = \frac{n}{e^{n-1}}$; pour tout entier naturel $n \geq 1$

1.Calculer U_1 et U_2.

2.Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et positive puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3. Démontrer que: $\forall n \in IN^*$; $U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^n}$ (*).

4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose: $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.

a) En utilisant l'égalité (*) démontrer que: $S_n = \frac{-1}{e-1}U_n + \frac{e^2}{(e-1)^2}(1 - \frac{1}{e^n})$.

b) Déduire de ce qui précède que: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{e^2}{(e-1)^2}$.

EXERCICE 15

1) On pose pour tout nombre complexe $z \neq -6$, $f(z) = \frac{8z+3}{z+6}$.

a) Donner la forme algébrique des nombres : $z_1 = f(2i)$, $z_2 = f(3-2i)$, $z_3 = f(\frac{1}{2})$

b) Résoudre l'équation $f(z) = z$

2) On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{8u_n + 3}{u_n + 6}$.

a) Calculer les valeurs exactes des termes u_1, u_2 et u_3.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier n non nul, $1 < u_n < 3$.

c) Montrer que (u_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

3) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite (v_n) par : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont précisera la raison et le premier terme v_0.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 16

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = i$ et, pour tout entier *n*, $z_{n+1} = \frac{1-i}{2}z_n$.

Pour *n* entier naturel, on appelle M_n le point d'affixe z_n.

1)Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 .

2) Montrer que pour tout *n* entier naturel, $z_n = \frac{ie^{-i\frac{n\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$.

3) En déduire que la suite $V_n = |z_n|$ est une suite géométrique . Donner son terme général et sa limite.

4) Montrer que quel que soit *n* entier naturel, les triangles OM_nM_{n+1} sont rectangles.