التمرين

لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+2U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

نضع: $V_n = \dfrac{1}{U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

a.1) احسب الحدود U_1 ، U_2 ، V_1 ، V_0 ، V_2 .

b) بين أن (V_n) متتالية حسابية وحدد أساسها.

2) عبر عن V_n ثم U_n بدلالة n .

3) ادرس تقارب المتتاليتين.

الحل

a.1) لدينا

$$U_1 = \frac{U_0}{1+2U_0} = \frac{1}{3} \qquad U_2 = \frac{U_1}{1+2U_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$V_0 = \frac{1}{U_0} = 1 \qquad V_1 = \frac{1}{U_1} = 3 \qquad V_2 = \frac{1}{U_2} = 5$$

b) للبرهان أن أن (V_n) متتالية حسابية نبين أن الفرق $V_{n+1} - V_n$ ثابت :

لدينا : $$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1+2U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n}$$

ومنه نجد $V_{n+1} - V_n = 2$ إذن (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$.

2) نعلم أن $V_n = V_0 + nr$ إذن $V_n = 1 + 2n$

وبمـــا أن $V_n = \frac{1}{U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ فـــإن $U_n = \frac{1}{V_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ومنـــه

$$U_n = \frac{1}{1+2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3) لدينا $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}(1+2n) = +\infty$ إذن المتتالية (V_n) متباعدة.

لدينا $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+2n} = 0$ إذن المتتالية (U_n) متقاربة.