التمرين

نضع لكل n من IN: $U_n = \dfrac{2^n - 4n + 3}{2}, V_n = \dfrac{2^n + 4n - 3}{2}$

1) حدد طبيعة كل من المتتاليتين (a_n) و (b_n) المعرفتين كما يلي:

$$a_n = U_n + V_n; \quad b_n = U_n - V_n; \quad \forall n \in IN$$

2) استنتج مما سبق قيمة كل من المجموعين:

$$S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n \ ؛ \ S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

الحل

1) لدينا

$$a_n = U_n + V_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} + \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$

$$= \frac{2^n + 2^n}{2} = 2^n$$

$$a_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2a_n$$

نستنتج منه أن المتتالية (a_n) هندسية أساسها $q = 2$

كما أن

$$b_n = U_n - V_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} - \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$

$$= \frac{-8n + 6}{2} = -4n + 3$$

$$b_{n+1} = -4(n+1) + 3 = -4n - 4 + 3 = b_n - 4$$

نستنتج منه أن المتتالية (b_n) حسابية أساسها $r = -4$

2) لحساب المجموعين لدينا:

(2

$$S_n + S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n + V_0 + V_1 + \cdots + V_n$$

$$= (U_0 + V_0) + (U_1 + V_1) + \cdots + (U_n + V_n)$$

$$S_n + S'_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
$$= a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$

$$S_n + S'_n = 2^{n+1} - 1$$

من جهة أخرى

$$S_n - S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n - V_0 - V_1 - \cdots - V_n$$
$$= (U_0 - V_0) + (U_1 - V_1) + \cdots + (U_n - V_n)$$

$$S_n - S'_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$
$$= \frac{(n+1)(b_0 + b_n)}{2}$$
$$S_n - S'_n = \frac{(n+1)(3 - 4n + 3)}{2}$$
$$= (n+1)(-2n+3)$$
$$S_n - S'_n = (n+1)(-2n+3)$$

$$\begin{cases} S_n + S'_n = 2^{n+1} - 1 & (1) \\ S_n - S'_n = (n+1)(-2n+3) & (2) \end{cases}$$
$$2S_n = 2^{n+1} - 1 + (n+1)(-2n+3)$$
$$S_n = \frac{1}{2}[2^{n+1} - 1 + (n+1)(-2n+3)]$$
$$2S'_n = 2^{n+1} - 1 - (n+1)(-2n+3)$$
$$S'_n = \frac{1}{2}[2^{n+1} - 1 - (n+1)(-2n+3)]$$