République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et Concours
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2015

Session Normale

Série : C &t TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients:9 & 6

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: (0,5 pt)

$$P(z)=(z-3)(z^2+az+b).$$

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. (1 pt)

c) Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $\mathrm{Im}(z_A)<\mathrm{Im}(z_B)<\mathrm{Im}(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$ et placer les points A ,B ,C et G. (0,5 pt)

2) Pour tout réel k différent de 2, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(3-k)\overrightarrow{MC}.$$

a) Pour quelles valeurs de k, l'application f_k est une translation? Déterminer alors son vecteur. (0,5 pt)

b) On suppose que $k\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k. Reconnaître alors f_k et donner ses éléments caractéristiques en fonction de k. (0,5 pt)

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. Reconnaître Ω_1. (0,5 pt)

d) Pour $k=1$; déterminer et construire le lieu géométrique du point R centre de gravité du triangle AMM' lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C. (0,5pt)

3) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M)=2MA^2-2MB^2+2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=k$, où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_m. (0,5 pt)

b) Déterminer et construire Γ_m pour $k=10$. (0,5 pt)

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct $ABCD$ de longueur AD tel que AB=a et AD=2a, $(a>0)$. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit O le centre du rectangle $ABCD$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes. (0,5 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme B en C et J en D. Préciser le centre et un angle de r. (0,5 pt)

2.a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme I en C et A en K. (0,25 pt)

b) Montrer que g est une symétrie glissante et vérifier que $g=t_{\overrightarrow{IC}}\circ s_{AB}$. (0,5 pt)

c)Déterminer une droite Δ telle que $t_{\overrightarrow{BC}}=s_\Delta\circ s_{AB}$. En déduire la forme réduite de g, (on pourra remarquer que $t_{\overrightarrow{IC}}=t_{\overrightarrow{IB}}\circ t_{\overrightarrow{BC}}$). (0,25 pt)

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme A en C et B en L. Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que $s(J)=B$. (0,5 pt)

b) Soient Γ_1 le cercle de centre A passant par B, et Γ_2 le cercle de centre C passant par L. Justifier que $s(\Gamma_1)=\Gamma_2$

4) On désigne par P le centre de s.
a) Montrer que P est situé sur les cercles Γ_1 et Γ_2. Préciser P. (0,25 pt)
b) Vérifier que P est le symétrique de L par rapport à (AC).
c) Soit E le symétrique de L par rapport à D. Vérifier que P est situé sur la droite (BE). (0,25 pt)
5.a) Soit R le symétrique de L par rapport à J. Montrer que $s(L) = R$. (0,25 pt)
b) Soit M un point de Γ_1 distinct de P. On note $s(M') = M''$. Montrer que : (0,25 pt) (0,25 pt)
i) La droite (MM') passe par un point fixe que l'on précisera.
ii) Le triangle MM'M'' est rectangle isocèle.
6) Soit Γ la parabole de foyer L et de directrice (BC). (0,25 pt)
a) Montrer que Γ passe par A, O et D. (0,25pt)
b) Préciser la tangente à Γ en A et tracer Γ. (0,25 pt)
c) Déterminer et construire le foyer et la directrice de $\Gamma' = s(\Gamma)$. (0,25 pt)

Exercice 3 (5 points) (0,25 pt)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.
b) Dresser le tableau de variation de f.
c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère. (0,75 pt) (0,5 pt)

2.a) Vérifier que le point $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C). (0,5 pt)
b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$. (0,25 pt)
c) Tracer les courbes (C) et (C').
d) Calculer, en fonction de α, l'aire A du domaine plan limité par les courbes (C) et (C'), et les axes des coordonnées (On pourra remarquer que $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$). (0,5 pt) (0,5 pt)

3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^\alpha f^n(t)dt$ où α est le réel trouvé en 2.b) (0,25 pt)
a) Justifier que $I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$.
b) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$. (0,25 pt)
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{n}\left(\alpha^n - \dfrac{1}{2^n}\right)$. (0,25 pt)
d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ? (0,5 pt) (0,25 pt)

4.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha^{n+1} \le I_n \le \dfrac{\alpha}{2^n}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n$. (0,25 pt)
b) Montrer que $I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}\left(\alpha^k - \dfrac{1}{2^k}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}\left(\alpha^k - \dfrac{1}{2^k}\right)$. (0,25 pt)

Exercice 4 (5 points)

1) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x)=\frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

a) Déterminer a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $g(x)=\frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{x(x^2-4x+5)}$. (0,5 pt)

b) Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$. (0,5 pt)

2) On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=3x-3+\ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, interpréter graphiquement. (0,5 pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$. (0,5 pt)

c) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une, notée D, est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D.

3.a) Vérifier que $f'(x)=g(x)$ où g est la fonction définie en 1), et dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)

b) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1}. (0,5 pt)

c) Construire (C) . (0,5pt)

4) On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y=3x-3$, $x=3$ et $x=2+\sqrt{3}$. (0,5 pt)

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$.

b) Calculer $A=\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx$. (0,25 pt)

c) En posant $x=2+\tan t$ pour tout $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$; calculer $B=\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{1}{1+(x-2)^2}dx$. (0,25 pt)

d) En utilisant une intégration par parties, calculer $J=\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln(x^2-4x+5)dx$ et $K=2\int_3^{2+\sqrt{3}}\ln x dx$. En Déduire le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire. (0,25 pt)

Fin.

Corrigé

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

a)Pour calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$, on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le tableau d'Horner :

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3		3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

Alors, $P(3)=0$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-3)(z^2+(-8-6i)z+4+20i)$.

Donc $a=-8-6i$ et $b=4+20i$.

b) L'équation $P(z)=0$ équivaut à $z-3=0$ ou $z^2+(-8-6i)z+4+20i=0$

On a $z-3=0 \Leftrightarrow z=3$.

Le discriminent de l'équation du second degré est

$$\Delta=(-8-6i)^2-4(4+20i)=64-36+96i-16-80i$$

$$\Delta=12+16i=(4+2i)^2. \quad \text{Donc } \delta=4+2i .$$

Les solutions sont

$$z_1=\frac{8+6i+4+2i}{2}=6+4i \text{ et } z_2=\frac{8+6i-4-2i}{2}=2+2i .$$

<u>Conclusion :</u> L'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est $S=\{3,\quad 6+4i,\quad 2+2i\}$.

c) Les points A, B et C sont les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $Im(z_A)<Im(z_B)<Im(z_C)$. Donc $z_A=3$, $z_B=2+2i$ et $z_C=6+4i$.

G barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$. G est alors le quatrième sommet du parallélogramme ABCG.

L'affixe de G est : $z_G=\dfrac{2z_A-2z_B+2z_C}{2-2+2}$

$$z_G=\frac{2(3)-2(2+2i)+2(6+4i)}{2}=\frac{14+4i}{2}=7+2i$$

2) L'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(3-k)\overrightarrow{MC} .$$

Cette question sera traitée par deux méthodes : Calcul vectoriel ou nombres complexes

<u>Méthode1 : Calcul vectoriel</u>

a) L'application f_k est une translation si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant.

La fonction vectorielle de Leibniz $(M\mapsto 2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(3-k)\overrightarrow{MC})$ est constante si et seulement si le poids du système $\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$ est nul. Ce qui équivaut à $3-k=0$. Soit $k=3$.

Alors, f_k est une translation si et seulement si $k=3$. On obtient son vecteur en remplaçant M dans l'expression vectorielle $\vec{v}=2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(3-k)\overrightarrow{MC}$ par n'importe quel point. Pour M en C on obtient $\vec{v}=2\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BA}$.

b) Si $k \neq 3$, le poids du système $\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$ est non nul. Donc ce système admet un barycentre G_k et on a pour tout point M du plan $2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+(3-k)\overrightarrow{MC}=(3-k)\overrightarrow{MG_k}$. D'où :

$f_k(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=(3-k)\overrightarrow{MG_k}$.

$f_k(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_k}+\overrightarrow{G_kM'}=(3-k)\overrightarrow{MG_k}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM'}=(2-k)\overrightarrow{MG_k}$

Enfin, $f_k(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM'}=(k-2)\overrightarrow{G_kM}$

Particulièrement, pour $k=2$ on a : $f_2(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{G_2M'}=\vec{0} \Leftrightarrow M'=G_2$ donc l'application f_2 est constante.

G_2 est le barycentre du système $\{(A;2),(B;-2),(C;1)\}$. Alors $\overrightarrow{CG_2}=2\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BA}$.

Donc $\overrightarrow{CG_2}=2\overrightarrow{CG}$. Alors G_2 est le symétrique de C par rapport à G.

Maintenant, si $k \in \mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ et M un point invariant par f_k, alors $f_k(M)=M \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM}=(k-2)\overrightarrow{G_kM} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_kM}=\vec{0} \Leftrightarrow M=G_k$. D'où f_k admet un unique point invariant $\Omega_k=G_k=\text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$.

f_k est l'homothétie de centre Ω_k et de rapport $k-2$.

c) On a $\Omega_k=G_k=\text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;3-k)\}$

Donc $2\overrightarrow{\Omega_kA}-2\overrightarrow{\Omega_kB}+(3-k)\overrightarrow{\Omega_kC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{BA}+(3-k)\overrightarrow{\Omega_kC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{\Omega_kC}=\frac{2}{3-k}\overrightarrow{AB}$

Alors Ω_k est situé sur la droite passant par C et parallèle à (AB).

Comme $\frac{2}{3-k}\neq 0$ et $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$, on a $\overrightarrow{\Omega_kC}\neq\vec{0}$ donc $\Omega_k\neq C$.

Comme $k\neq 2$, on a $\overrightarrow{\Omega_kC}\neq 2\overrightarrow{AB}$ donc $\Omega_k\neq G_2$ où G_2 est le point tel que $\overrightarrow{G_2C}=2\overrightarrow{AB}$. G_2 est le symétrique de C par rapport à G. C'est aussi le quatrième sommet du parallélogramme $ABGG_2$.

Conclusion : Le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ est la droite passant par C et parallèle à (AB) privée de C et G_2.

d) Le centre de gravité R du triangle AMM' est le barycentre du système $\{(A;1),(M;1),(M';1)\}$. Alors pour tout point M du plan on a, pour $k=1$:

$3\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MM}+\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+(2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{BC}$

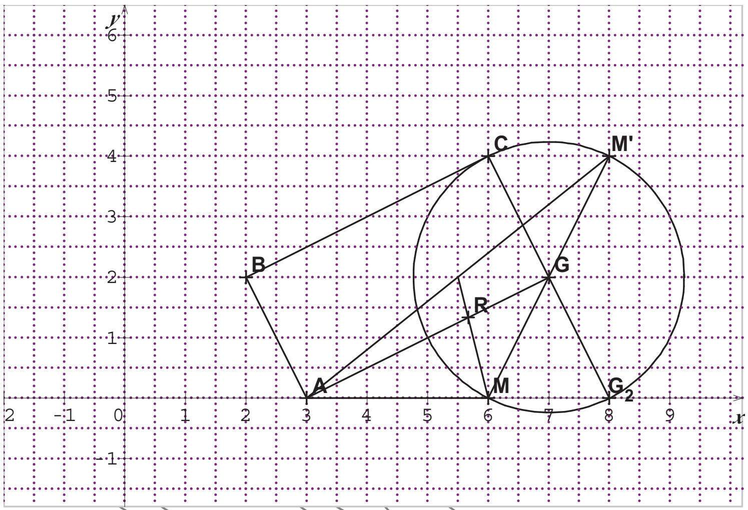
D'où $3\overrightarrow{MR}-3\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{BC}$.

Enfin $\overrightarrow{AR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. D'où le centre de gravité R du triangle AMM' est un point fixe indépendant de la position de M. Le lieu géométrique de R est un point fixe.

On peut aussi remarquer que, pour $k=1$, la transformation f_k est l'homothétie de centre $\Omega_1=\text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}=G$ et de rapport $k-2=-1$. Alors c'est une symétrie centrale de centre G. Donc G est le milieu du segment $[MM']$.

D'où le barycentre R du système $\{(A;1),(M;1),(M';1)\}$ est celui de $\{(A;1),(G;2)\}$. Donc $\overrightarrow{AR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. Comme $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BC}$ on retrouve le résultat précédent $\overrightarrow{AR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Le centre de gravité R du triangle AMM' est fixe car le milieu G des points variables M et M' est un point fixe.



Méthode2 : Nombres complexes

a) On désigne par z et z' les affixes respectives de M et M'.

$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + (3-k)\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow z' - z = 2(z_A - z) - 2(z_B - z) + (3-k)(z_C - z)$

$\Leftrightarrow z' - z = 2(3-z) - 2(2+2i-z) + (3-k)(6+4i-z)$

$\Leftrightarrow z' = z + 6 - 2z - 4 - 4i + 2z + 18 - 6k + 12i - 4ki - (3-k)z$

$\Leftrightarrow z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$

Une expression de type $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$.

Si $k = 3$, on a $z' = z + 2 - 4i$ donc f_3 est une translation dont le vecteur a pour affixe

$2 - 4i$ **. Soit** $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$.

b) Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$, alors $k-2 \neq 0$ et $k-2 \neq 1$. Les points invariants sont d'affixes z vérifiant $z' = z$.

$z' = z \Leftrightarrow z = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i \Leftrightarrow z = \dfrac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$

D'où f_k admet un unique point invariant Ω_k d'affixe $z_k = \dfrac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k}$.

D'après la forme complexe $z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$, f_k est l'homothétie de centre Ω_k et de rapport $k-2$.

c) L'affixe de Ω_k est $z_k = \dfrac{20 - 6k + (8-4k)i}{3-k} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{20-6k}{3-k} = \dfrac{6k-20}{k-3} \\ y_k = \dfrac{8-4k}{3-k} = \dfrac{4k-8}{k-3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_k = 6 - \dfrac{2}{k-3} \\ y_k = 4 + \dfrac{4}{k-3} \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 16 = 0$$ **. C'est l'équation d'une droite Δ .**

Comme $(x_k, y_k) = \left(6 - \dfrac{2}{k-3}, 4 + \dfrac{4}{k-3}\right)$ avec $\dfrac{2}{k-3} \neq 0$ et $\dfrac{4}{k-3} \neq 0$. On a alors $(x_k, y_k) \neq (6,4)$. D'où $\Omega_k \neq C(6,4)$.

Comme $k \neq 2$, on a $(x_k, y_k) \neq (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_k, y_k) \neq \left(6 - \dfrac{2}{2-3}, 4 + \dfrac{4}{2-3}\right) \Rightarrow (x_k, y_k) \neq (8,0)$, donc $\Omega_k \neq G_2(8,0)$.

Conclusion : Le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ est la droite Δ d'équation $2x+y-16=0$ privée de $C(6,4)$ et $G_2(8,0)$.

*** Pour $k=1$, $\Omega_1 = G_1 = \text{bar}\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$. C'est le quatrième sommet du parallélogramme $ABCG_1$, avec $\begin{cases} x_1 = \frac{14}{2} = 7 \\ y_1 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$. D'où $\Omega_1(7,2)$.**

d) L'affixe de M' est $z' = (k-2)z + 20 - 6k + (8-4k)i$. Pour $k=1$, on a $z' = -z + 14 + 4i$.
Alors l'affixe du point R centre de gravité du triangle AMM' est $z_R = \frac{z_A + z + z'}{3}$

$$z_R = \frac{z + (-z + 14 + 4i) + 3}{3}$$

$z_R = \frac{17+4i}{3} = \frac{17}{3} + \frac{4}{3}i$. Alors lorsque M décrit le cercle Γ de centre G passant par C, le point R reste fixe.

3) Pour tout point M du plan on a $\varphi(M) = 2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = m$, où m est un réel.
La somme des coefficients est égale à 2 (non nulle). Le barycentre G de ce système est le point $\Omega_1(7,2)$.
Alors, par transformation d'écriture on obtient l'écriture réduite $\varphi(M) = 2MG^2 + \varphi(G)$.
Donc $M \in \Gamma_m \Leftrightarrow 2MG^2 + \varphi(G) = m$

soit $MG^2 = \frac{m - \varphi(G)}{2}$.

Calculons $\varphi(G)$:

On a $\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$. On remarque que G est le point $\Omega_1(7,2)$.

Donc : $GA^2 = |z_A - z_G|^2 = |3 - 7 - 2i|^2 = |-4-2i|^2 = 20$

$$GB^2 = |z_B - z_G|^2 = |2 + 2i - 7 - 2i|^2 = |-5|^2 = 25$$

$$GC^2 = |z_C - z_G|^2 = |6 + 4i - 7 - 2i|^2 = |-1 + 2i|^2 = 5.$$

Alors $\varphi(G) = 2GA^2 - 2GB^2 + 2GC^2$

$$\varphi(G) = 2\times 20 - 2\times 25 + 2\times 5$$

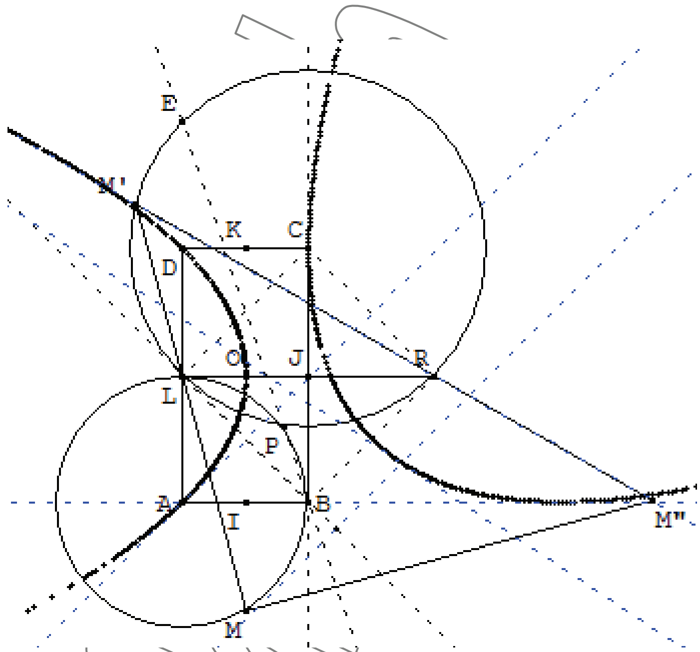
Enfin $\varphi(G) = 0$. D'où $M \in \Gamma_m \Leftrightarrow MG^2 = \frac{m}{2}$.

Discussion suivant les valeurs de m:
$m<0$: Γ_m est l'ensemble vide.
$m=0$: Γ_m est le point G
$m>0$: Γ_m est le cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\frac{m}{2}}$.

b) D'après les résultats précédents, pour $m=10$, l'ensemble est un cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$. Comme $GC^2 = 5$, ce cercle passe par C. Donc Γ_{10} est le cercle de centre G passant par C.

Exercice 2

1.a) Figure



b) Comme $BJ = CD \neq 0$ et $\overrightarrow{BJ} \neq \overrightarrow{CD}$, donc il existe une unique rotation r qui transforme B en C et J en D.

On a

$$\begin{array}{c} \quad r \\ B \longrightarrow C \\ J \longrightarrow D \end{array}$$

Alors, le centre de r est le point d'intersection des médiatrices des segments $[BC]$ et $[JD]$. Soit le point L.

Un angle de r est $\theta = (\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$. Donc $\theta = (\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2.a) On $IA = CK \neq 0$. Alors il existe un unique antidéplacement g qui transforme I en C et A en K.

b) Comme $\begin{array}{c} \quad g \\ I \longrightarrow C \\ A \longrightarrow K \end{array}$ et les segments n'ont pas la même médiatrice, alors l'antidéplacement g n'est pas une réflexion. D'où g est une symétrie glissante.

On a $t_{\overrightarrow{IC}} \circ s_{AB}(I) = t_{\overrightarrow{IC}}(s_{AB}(I)) = t_{\overrightarrow{IC}}(I) = C$; $((s_{AB}(I)) = I$ car $I \in (AB))$

Et $t_{\overrightarrow{IC}} \circ s_{AB}(A) = t_{\overrightarrow{IC}}(s_{AB}(A)) = t_{\overrightarrow{IC}}(A) = K$;

$(s_{AB}(A) = A$ car $A \in (AB))$ et $t_{\overrightarrow{IC}}(A) = K$ car ICKA est un parallélogramme)

Donc $\begin{array}{c} \quad t_{\overrightarrow{IC}} \circ s_{AB} \\ I \longrightarrow C \\ A \longrightarrow K \end{array}$.

Enfin, d'après le théorème de l'unicité d'un antidéplacement : $g = t_{\overrightarrow{IC}} \circ s_{AB}$.

c) On a $t_{\overrightarrow{BC}} = s_{JL} \circ s_{AB}$. Donc Δ est la droite (JL) car $(JL)//(AB)$, $(BJ) \perp (AB)$ et $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BJ}$.

On remarque que $t_{\overrightarrow{IC}} = t_{\overrightarrow{IB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$. On en déduit que :

$$g = t_{\overrightarrow{IC}} \circ s_{AB} = t_{\overrightarrow{IB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ s_{AB} = t_{\overrightarrow{IB}} \circ s_{JL} \circ s_{AB} \circ s_{AB} = t_{\overrightarrow{IB}} \circ s_{JL} = t_{\overrightarrow{IB}} \circ s_{\Delta}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{IB}$ est un vecteur directeur de l'axe Δ. D'où la forme réduite de g :

$g = t_{\overrightarrow{IB}} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta} \circ t_{\overrightarrow{IB}}$

3.a) 2.a) Comme $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{CL} \neq \vec{0}$, donc il existe une unique similitude directe s qui transforme A en C et B en L.

b) On a

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{s} C \\ B \longrightarrow L \end{array}$$

Alors l'angle de s est $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CL})\ [2\pi]$. Donc

$$\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{JA}) = \pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}) = \pi + \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad \theta = \frac{5\pi}{4}[2\pi].$$

Le rapport de s est : $\lambda = \dfrac{CL}{AB} = \dfrac{AJ}{AB} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.

Pour montrer que $s(J) = B$, on sait que s transforme A en C et B en L, et que la similitude conserve la configuration : elle transforme le triangle ABJ rectangle isocèle en B direct en un triangle CLJ' rectangle isocèle en $s(B) = L$ direct. C'est le triangle CLB. Alors $s(J) = B$.

b) On a :

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{s} C \\ B \longrightarrow L \end{array}$$

Alors s transforme le cercle de centre A passant par B, au cercle de centre C passant par L. D'où $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

4) On désigne par P le centre de s.

a) On a :

$$\begin{array}{l} P \xrightarrow{s} P \\ B \longrightarrow L \end{array}$$

Alors $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PL}) = \dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

$$2(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PL}) = \frac{5\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$2(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PL}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$2(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PL}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AL})\ [2\pi]$$

D'après le théorème de l'angle au centre, le point P est situé sur le cercle de centre A passant par B et L. Donc $P \in \Gamma_1$.

D'autre part, on a : $\begin{array}{l} P \xrightarrow{s} P \\ A \longrightarrow C \\ B \longrightarrow L \end{array}$.

La similitude conserve le rapport des distances. Alors $\dfrac{CP}{CL} = \dfrac{AP}{AB}$.

Comme $P \in \Gamma_1$ et $B \in \Gamma_1$, on obtient $\dfrac{AP}{AB} = 1$. D'où $\dfrac{CP}{CL} = 1$.

Donc $CP = CL$. D'où $P \in \Gamma_2$.

Conclusion : Le point P est situé sur les cercles Γ_1 et Γ_2.

Pour préciser P , on constate que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en L et un autre point. Comme $L = s(B) \Rightarrow s(L) \neq L$, le centre de s n'est pas en L. Enfin P est le deuxième point d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_2 autre que L.

b) D'après la question précédente :

$P \in \Gamma_1 \Rightarrow AP = AL$. Donc A est un point de la médiatrice de $[PL]$.

$P \in \Gamma_2 \Rightarrow CP = CL$. Donc C est un point de la médiatrice de $[PL]$.

Alors la droite (AC) est la médiatrice de $[PL]$.

On en déduit que P est le symétrique de L par rapport à (AC).

c) E est le symétrique de L par rapport à D. CDDE) Donc (CD) est la médiatrice de $[LE]$. D'où $CE = CL$. Alors $E \in \Gamma_2$.

On vérifie que $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PE}) = 0[\pi]$.

On a $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PE}) = (\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PL}) + (\overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PE})[\pi]$

$$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PE}) = \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CL}, \overrightarrow{CE})[\pi]$$

$$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PE}) = \frac{5\pi}{4} + (\overrightarrow{CL}, \overrightarrow{CD})[\pi]$$

$$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PE}) = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}[\pi]$$

$$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PE}) = \pi[\pi]$$

$$(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PE}) = 0[\pi].$$

D'où P est situé sur la droite (BE).

5.a) R est le symétrique de L par rapport à J.

Pour montrer que $s(L) = R$, on note $s(L) = L'$. On sait que la similitude conserve la configuration :

$$\begin{array}{c} s \\ A \longrightarrow C \\ B \longrightarrow L \\ J \longrightarrow B \\ L \longrightarrow L' \end{array}$$

s transforme le carré direct ABJL en un carré direct CLBL'. C'est le carré CLBR. Alors $s(L) = R$.

En d'autres termes, L est le quatrième sommet du carré ABJL, Donc L' est le quatrième sommet de son image : le carré CLBL' dont on connaît déjà les sommets C, L et B. Alors L' = R.

On peut aussi utiliser la conservation du barycentre.

b) Soit M un point de Γ_1 distinct de P et L. $s(M) = M'$. On a :

$$2(\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{LM'}) = 2(\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{LP}) + 2(\overrightarrow{LP}, \overrightarrow{LM'})[2\pi]$$

$$2(\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{LM'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CM'})[2\pi]$$

Comme la similitude conserve les angles orientés :

$$\begin{array}{c} s \\ A \longrightarrow C \\ M \longrightarrow M' \\ P \longrightarrow P \end{array}$$

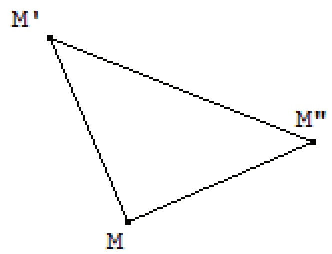
$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) = (\overrightarrow{CM'}, \overrightarrow{CP})[2\pi]$$

Donc : $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CM'})=0[2\pi]$

D'où $2(\overrightarrow{LM},\overrightarrow{LM'})=0[2\pi]$. **Alors, les points** M, M' **et L sont alignés et la droite (MM') passe par L.**
Maintenant, si M est en L, la droite (MM') passe par L.
Enfin, pour tout point M de Γ_1 **distinct de P, la droite (MM') passe par un point fixe : C'est le point L.**

ii) On a : $\left.\begin{matrix} M \xrightarrow{s} M' \\ M' \longrightarrow M'' \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{M'M''})=\dfrac{5\pi}{4}[2\pi] \\ \dfrac{M'M''}{MM'}=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{M'M},\overrightarrow{M'M''})=\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \\ \dfrac{M'M}{M'M''}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Alors, le triangle MM'M'' est rectangle isocèle en M
.



6.a) La parabole Γ **de foyer L et de directrice (BC) est l'ensemble des points équidistants du point L et de la droite (BC) :**

$M\in\Gamma \Leftrightarrow \dfrac{ML}{MH}=1$ **où H est le projeté orthogonal de M sur (BC).**
Les points B,J et C sont les projetés orthogonaux respectifs sur (AB) de A, O et D.

On a : $\dfrac{AL}{AB}=1 \Rightarrow A\in\Gamma$

$\dfrac{OL}{OJ}=1 \Rightarrow O\in\Gamma$

$\dfrac{DL}{DC}=1 \Rightarrow D\in\Gamma$.

Alors Γ **passe par A, O et D.**
b) Comme B est le projeté orthogonal de A sur la directrice, la tangente à Γ **en A est la médiatrice du segment** $[BL]$**. C'est la droite (AJ), (la diagonale du carré ABJL).**
c) On sait que la similitude conserve la configuration. $\Gamma'=s(\Gamma)$
Le foyer de Γ' **est l'image de celui de** Γ **par s. C'est le point** $R=s(L)$.
La directrice de Γ' **est l'image de (BC), celle de** Γ**. C'est la droite (BL) car** $s(B)=L$ **et** $s(J)=B$ **et** $J\in(BC)$.
Pour la construction, voir la figure.

<u>EXERCICE 3</u>

$f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$

1.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^x}=1$ **car** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^x}=0$ **car** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

Interprétation graphique :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \Rightarrow$ **(C) admet une asymptote horizontale d'équation** $y=1$ **au voisinage de** $-\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow$ **(C) admet une asymptote horizontale d'équation** $y=0$ **au voisinage de** $+\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$. On constate que $f'(x)<0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f'	-
f	1 $\searrow$ 0

$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue,} \\ \text{et strictement décroissante sur } \mathbb{R}, \\ f(\mathbb{R})=\left]0;1\right[\\ \text{Alors } f:\mathbb{R}\to\left]0,1\right[\text{ est bijective } ; J=\left]0,1\right[\end{array}\right.$

Pour exprimer $f^{-1}(x)$, on pose $y=f(x)$.

On a : $y=\dfrac{1}{1+e^x}\Leftrightarrow y(1+e^x)=1$

$\Leftrightarrow y+ye^x=1$

$\Leftrightarrow ye^x=1-y$

$\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1-y}{y}$

$\Leftrightarrow x=\ln(\dfrac{1-y}{y})$

D'où $=f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{x}\right),\ x\in\left]0,1\right[$

2.a) On vérifie une égalité du type $f(2a-x)+f(x)=2b$ avec $(a,b)=(0,\dfrac{1}{2})$

On a : $f(2a-x)=f(-x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}\times\dfrac{e^x}{e^x}=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

Donc, $f(2a-x)+f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}+\dfrac{1}{1+e^x}$

$f(2a-x)+f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+1}=1=2\times\dfrac{1}{2}=2b$

D'où $\Omega(0,\dfrac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

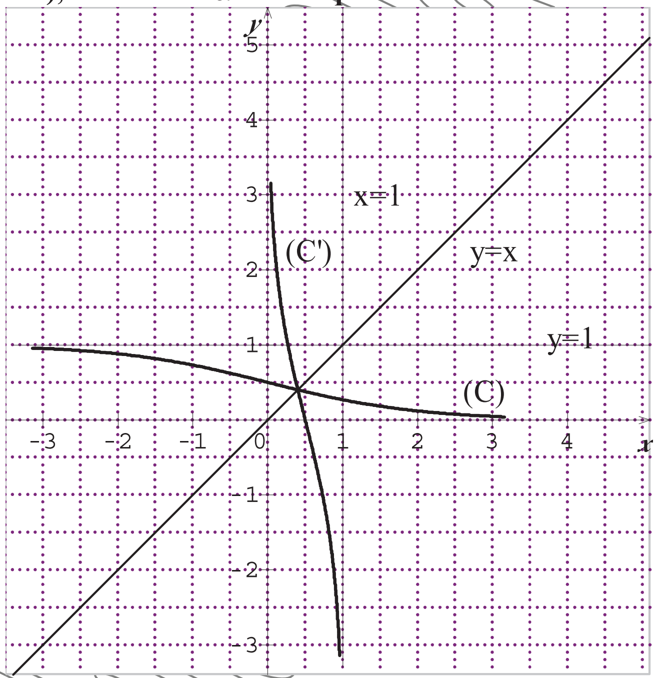
b) Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.
S'il se coupent en un point d'abscisse x, alors x vérifie $f(x)=x$, soit $f(x)-x=0$.
On pose $V(x)=f(x)-x$
V est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, avec $V'(x)=f'(x)-1$.

$V'(x)=\dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}-1=-\left(1+\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\right).$

Il est clair que pour tout x de $\mathbb{R}$, $V'(x)<0$. D'où V est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
On a

$\left\{\begin{array}{l} V(0,4)\simeq 1,3\times10^{-3}>0 \\ V(0,5)\simeq -0,12<0 \end{array}\right.$

Donc $V(0,4)\times V(0,5)<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $V(x)=0$ admet une solution α telle que $0,4<\alpha<0,5$. (V est continue sur $[0,4;0,5]$ et change de signe). D'après le théorème de la bijection réciproque (V est continue est strictement monotone), la solution α est unique.



d) Par symétrie, l'aire cherchée A est égale au double de l'aire comprise entre (C), la droite $y=x$ et les droites verticales d'équations $x=\alpha$ et $x=0$ (l'axe Oy).

$$A=2\int_0^{\alpha}(f(x)-x)dx$$

$$A=2\int_0^{\alpha}\left(\frac{1}{e^x+1}-x\right)dx$$

$$A=2\int_0^{\alpha}\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}-x\right)dx$$

$$A=-2\int_0^{\alpha}\left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}+x\right)dx$$

$$A=-2\left[\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha}$$

$$A=2\left[-\ln(1+e^{-x})-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha}$$

$$A=2\left(-\ln(1+e^{-\alpha})-\frac{1}{2}\alpha^2+\ln 2\right)$$

$$A=-2\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{2}\right)-\alpha^2$$

$A=2\ln\left(\dfrac{2e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}}\right)-\alpha^2$ **en unité d'aire.**

3) On a $I_n=\int_0^{\alpha}f^n(t)dt$

a) $I_1=\int_0^{\alpha}f(t)dt$

$$I_1 = \int_0^{\alpha} \frac{1}{e^t+1}dt$$

$$I_1 = \int_0^{\alpha} \frac{1}{e^t+1}\times\frac{e^{-t}}{e^{-t}}dt$$

$$I_1 = -\int_0^{\alpha} \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}dt$$

$$I_1 = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^{\alpha}$$

$$I_1 = -\ln(1+e^{-\alpha})+\ln 2$$

$$I_1 = -\ln\left(\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}}\right)+\ln 2$$

$$I_1 = \ln\left(\frac{1}{e^{\alpha}+1}e^{\alpha}\right)+\ln 2$$

$$I_1 = \ln(\alpha e^{\alpha})+\ln 2 \ \text{ car } f(\alpha)=\alpha \Rightarrow \frac{1}{e^{\alpha}+1}=\alpha$$

$$I_1 = \ln(\alpha)+\ln e^{\alpha}+\ln 2$$

$$I_1 = \alpha+\ln(2\alpha).$$

3.a) On a : $f'(x)=\dfrac{-e^x}{(1+e^{-x})^2}$.

$$f^2(x)-f(x)=\frac{1}{(1+e^x)^2}-\frac{1}{1+e^x}\times\frac{1+e^x}{1+e^x}$$

$$=\frac{1}{(1+e^x)^2}-\frac{1+e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$=\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}=f'(x)$$

Donc : $f'(x)=f^2(x)-f(x)$

c) D'après b), en multipliant par $f^{n-1}(x)$ on obtient : $f'(x)f^{n-1}(x)=f^{n+1}(x)-f^n(x)$

Par intégration de 0 à α : $\displaystyle\int_0^{\alpha} f'(x)f^{n-1}(x)dx=\int_0^{\alpha} f^{n+1}(x)dx-\int_0^{\alpha} f^n(x)dx$

$$\left[\frac{1}{n}f^n(x)\right]_0^{\alpha}=I_{n+1}-I_n$$

$$\frac{1}{n}\left(f^n(\alpha)-f^n(0)\right)=I_{n+1}-I_n$$

$$\frac{1}{n}\left(\alpha^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=I_{n+1}-I_n$$

$$I_{n+1}-I_n=\frac{1}{n}\left(\alpha^n-\frac{1}{2^n}\right)$$

d) On a $\alpha>0$ et pour tout entier naturel non nul n, f^n est continue et positive sur $[0,\alpha]$. Alors $\int_0^{\alpha} f^n(t)dt\geq 0$. D'où $I_n\geq 0$. Donc (I_n) est positive.

D'autre part, pour tout entier naturel non nul n on a :

$$0<\alpha<0{,}5\Rightarrow 0<\alpha^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow \alpha^n<\frac{1}{2^n}\Rightarrow \alpha^n-\frac{1}{2^n}<0\Rightarrow I_{n+1}-I_n<0$$

D'où (I_n) est décroissante.

On en déduit que la suite (I_n) est convergente, car décroissante et minorée.

Remarque : Toute suite positive est minorée par 0, et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

4.a) On sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, si $0 \le t \le \alpha$, on a : $f(\alpha) \le f(t) \le f(0)$

donc $\alpha \le f(t) \le \frac{1}{2}$ et $\alpha > 0$ $\Rightarrow 0 < \alpha^n \le f^n(t) \le \frac{1}{2^n}$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha \alpha^n dt \le \int_0^\alpha f^n(t)dt \le \int_0^\alpha \frac{1}{2^n} dt$$

$$\alpha^n [t]_0^\alpha \le I_n \le \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha$$

$$\alpha^n(\alpha - 0) \le I_n \le \frac{1}{2^n}(\alpha - 0)$$

$$\alpha^{n+1} \le I_n \le \frac{\alpha}{2^n}$$

Comme $0 < \alpha < 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^{n+1} = 0$. On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

Alors d'après le théorème de gendarme : $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n = 0$

b) On a pour tout $n > 0$: $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$. Donc :

$$\begin{cases} \text{pour} \quad n = 1 : I_2 - I_1 = (\alpha - \frac{1}{2}) \\ \text{pour} \quad n = 2 : I_3 - I_2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}) \\ \text{pour} \quad n = 3 : I_4 - I_3 = \frac{1}{3}(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}) \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \text{pour} \quad n-1 : I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{cases}$$

Par addition membre à membre et simplification :

$$I_n - I_1 = (\alpha - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}) + \frac{1}{3}(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}) + \ldots + \frac{1}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k})$$

$$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k}).$$

On peut écrire $I_n - (\alpha + \ln(2\alpha)) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k})$. Par passage aux limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k}) = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n - \lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha + \ln(2\alpha))$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$ car indépendant de n ; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha^k - \frac{1}{2^k}) = -(\alpha + \ln(2\alpha))$.

EXERCICE 4

1.a) Pour la transformation d'écriture de g(x), on factorise le dénominateur et le numérateur :

On factorise le dénominateur par x : $x^3-4x^2+5x=x(x^2-4x+5)$

Pour factoriser le numérateur on peut utiliser la division euclidienne, l'identification ou le tableau d'Horner :

	3	-12	19	-10
1		3	-9	10
	3	-9	10	0

Alors $3x^3-12x^2+19x-10=(x-1)(3x^2-9x+10)$.

Donc on a pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $g(x)=\dfrac{(x-1)(3x^2-9x+10)}{x(x^2-4x+5)}$;

Alors: $a=3, b=-9$ **et** $c=10$.

b) Les discriminants des trinômes $3x^2-9x+10$ **et** x^2-4x+5 **sont négatifs :** $\Delta_1=-39$ **et** $\Delta_2=-4$. **Les coefficients de** x^2 **sont positifs. On en déduit que pour tout x de** $\mathbb{R}^*$ **:** $3x^2-9x+10>0$ **et** $x^2-4x+5>0$. **D'où le signe de** $g(x)$ **est celui de** $\dfrac{x-1}{x}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$x-1$		-		-	0	+	
$\dfrac{x-1}{x}$		+	‖	-	0	+	
$g(x)$		+	‖	-	0	+	

2.a) On a $\lim\limits_{x\to 0}(3x-3)=-3$ **et** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)=+\infty$.

Alors $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

b) On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)=0$. **Donc** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3x-3)$. **D'où** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

c) D'après a) , la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

De plus $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(3x-3)\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)=0$, **donc la courbe (C) admet une asymptote oblique D d'équation** $y=3x-3$.

Pour étudier la position relative de (C) **et de** D**, on étudie le signe de**

$d(x)=f(x)-y=f(x)-(3x-3)$

$d(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$.

On rappelle que le signe de $\ln t$ **est celui de** $t-1$ **pour tout** $t>0$. **Alors le signe de** $d(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$ **est celui de** $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}-1$.

Par réduction au même dénominateur : $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}-1=\dfrac{x^2-4x+5-x^2}{x^2}=\dfrac{-4x+5}{x^2}$

Donc le signe de $d(x)$ **est celui de** $-4x+5$ **car** $x^2>0$.

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$-4x+5$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$d(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
P.R		C/D	‖	C/D		D/C	

Pour $x=\frac{5}{4}$ on a $y=3\times\frac{5}{4}-3=\frac{3}{4}$. Alors l'asymptote D coupe la courbe (C) au point $\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$.

3.a) On peut écrire $f(x)=3x-3+\ln(x^2-4x+5)-\ln(x^2)$

$f(x)=3x-3+\ln(x^2-4x+5)-2\ln x$. Donc $f'(x)=3+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{2}{x}$

$$f'(x)=3+\frac{(2x-4)x-2(x^2-4x+5)}{x(x^2-4x+5)}$$

$$f'(x)=\frac{3(x^3-4x^2+5x)+2x^2-4x-2x^2+8x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3-12x^2+15x+4x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

Enfin $f'(x)=g(x)$.

Tableau de variation de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on a $f(x)\geq\ln 2>0$. Donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.

Sur l'intervalle $]-\infty,0[$, la restriction de f est continue, strictement monotone et change de signe car $0\in f(]-\infty,0[)=]-\infty,+\infty[$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.

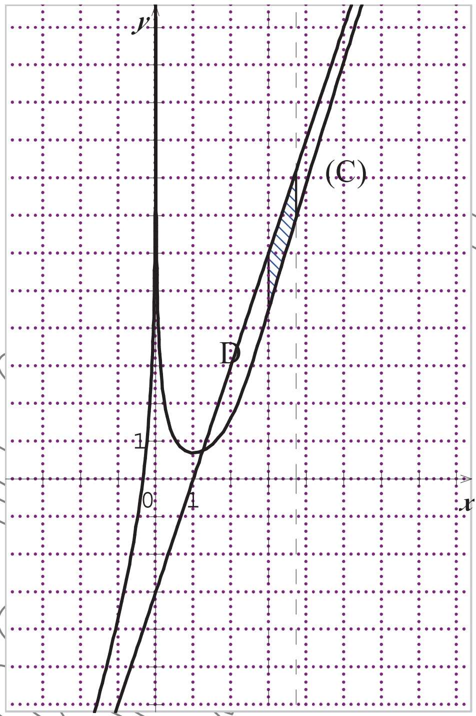
Alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^*$.

Pour encadrer α : $\left|\begin{array}{l} f(-1)=-6+\ln 10<0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty \end{array}\right\rangle \Rightarrow -1<\alpha<0$

$\left|\begin{array}{l} f(-0,5)=-4,5+\ln 29<0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty \end{array}\right\rangle \Rightarrow -0,5<\alpha<0$ C'est un encadrement de α d'amplitude 5×10^{-1}

.

c) Construction de (C)



4.a) On a

$$2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+x^2-4x+4}\right)$$

$$=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=2\left(1+\frac{2x-4-1}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=2\left(\frac{x^2-4x+5+2x-5}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=2\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+5}\right)$$

$$=\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}$$

Alors $\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}=2\left(1+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}-\frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$.

b) $A=\int_3^{2+\sqrt{3}}\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx=\left[\ln\left|x^2-4x+5\right|\right]_3^{2+\sqrt{3}}$ **car une primitive de fonction du type** $\frac{u'}{u}$ **est** $\ln|u|$.

En remplaçant par les bornes :

$A=\ln\left|(2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})+5\right|-\ln\left|(3)^2-4(3)+5\right|=\ln 4-\ln 2=\ln 2$.

c) En posant $x=2+\tan t$ **avec** $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ **; on a :**

$$\begin{cases} x=3\Leftrightarrow 2+\tan t=3\Leftrightarrow \tan t=1\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}\\ x=2+\sqrt{3}\Leftrightarrow 2+\tan t=2+\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan t=\sqrt{3}\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

$x = 2 + \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t)dt$

$x = 2 + \tan t \Rightarrow 1 + (x-2)^2 = 1 + \tan^2 t$

Pour calculer $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}dx$ **, on remplace avec le changement de variable :**

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}dx = \left[t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

Enfin $B = \frac{\pi}{12}$

d)

i) Pour calculer $J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)dx$ **à l'aide d'une intégration par parties,**

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x^2-4x+5) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-4x+5} \\ v(x) = x \end{cases}$

D'où $J = \left[x\ln(x^2-4x+5)\right]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}dx$

On remplace dans la première partie par les borne, et dans l'intégrale par l'expression trouvée en 4.a) :

$$J = (2+\sqrt{3})\ln\left((2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 5\right) - 3\ln\left((3)^2 - 4(3) + 5\right) - \int_3^{2+\sqrt{3}} 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)dx$$

$$J = (2+\sqrt{3})\ln 4 - 3\ln 2 - 2\left(\int_3^{2+\sqrt{3}} dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2}dx\right)$$

D'après 4.b) et 4.c) on obtient :

$$J = (2+\sqrt{3})\ln 2^2 - 3\ln 2 - 2\left(\left[x\right]_3^{2+\sqrt{3}} + A - B\right)$$

$$J = 2(2+\sqrt{3})\ln 2 - 3\ln 2 - 2\left(2+\sqrt{3} - 3 + \ln 2 - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$J = (1+2\sqrt{3})\ln 2 - 2\left(-1+\sqrt{3} + \ln 2 - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$J = (1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} - 2\ln 2 + \frac{\pi}{6}$$

$$J = (-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$$

ii) **Pour calculer** $K=2\int_3^{2+\sqrt3}\ln x\,dx$ **à l'aide d'une intégration par parties,**

on pose $\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=1\end{cases}$ **Alors** $\begin{cases}u'(x)=\dfrac{1}{x}\\ v(x)=x\end{cases}$

D'où $K=2\left(\left[x\ln x\right]_3^{2+\sqrt3}-\int_3^{2+\sqrt3}\frac{1}{x}x\,dx\right)$

$$K=2\left(\left[x\ln x\right]_3^{2+\sqrt3}-\int_3^{2+\sqrt3}dx\right)$$

$$k=2\left(\left[x\ln x\right]_3^{2+\sqrt3}-\left[x\right]_3^{2+\sqrt3}\right)$$

$$K=2\left(\left[x\ln x-x\right]_3^{2+\sqrt3}\right)$$

$$K=2\left((2+\sqrt3)\ln(2+\sqrt3)-(2+\sqrt3)-3\ln3+3\right)$$

$$K=2\left((2+\sqrt3)\ln(2+\sqrt3)+1-\sqrt3-3\ln3\right)$$

$$K=(4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3)+2-2\sqrt3-6\ln3$$

iii) Pour calculer l'aire S **du domaine délimité par la courbe** (C) **et les droites d'équations respectives :** $y=3x-3$ **,** $x=3$ **et** $x=2+\sqrt3$ **; on remarque que pour** $x\geq3$**, la droite d'équation** $y=3x-3$ **est au dessus de la courbe.**

Alors $S=\int_3^{2+\sqrt3}(y-f(x))dx=-\int_3^{2+\sqrt3}\ln\left(\dfrac{x^2-4x+5}{x^2}\right)dx$

$$S=-\int_3^{2+\sqrt3}\ln(x^2-4x+5)dx+\int_3^{2+\sqrt3}\ln(x^2)dx.\qquad \textbf{Donc}\quad S=-J+K$$

$$S=-\left((-1+2\sqrt3)\ln2+2-2\sqrt3+\frac{\pi}{6}\right)+\left((4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3)+2-2\sqrt3-6\ln3\right)$$

$$S=(1-2\sqrt3)\ln2-2+2\sqrt3-\frac{\pi}{6}+(4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3)+2-2\sqrt3-6\ln3$$

$S=(1-2\sqrt3)\ln2+(4+2\sqrt3)\ln(2+\sqrt3)-6\ln3-\dfrac{\pi}{6}$ **en unité d'aire.**

$S\simeq1,0066$ **en unité d'aire.**

Fin.