

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Éducation Nationale
Direction des Examens et des Concours
Service des Examens

Baccalauréat
2017
Session Complémentaire

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Épreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

1) On considère l'équation (E) : $2017x + 41y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.

- a) Vérifier que 2017 est un nombre premier puis montrer que l'équation (E) admet des solutions entières. (0,75 pt)
b) Vérifier que le couple $(-5; 246)$ est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E). (1 pt)
c) Dédire qu'il existe un unique entier y inférieur ou égal à 2016 tel que: $41y \equiv 1[2017]$ (0,5 pt)

Pour la suite de l'exercice on rappelle qu'un entier a est l'inverse de b modulo 2017 si $ab \equiv 1[2017]$.

2) Soient a et b deux entiers relatifs.

- a) Montrer que : si $ab \equiv 0[2017]$ alors $(a \equiv 0[2017] \text{ ou } b \equiv 0[2017])$ (0,25 pt)
b) Dédire que : si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $(a \equiv 1[2017] \text{ ou } a \equiv -1[2017])$ (0,25 pt)
c) Quels sont donc les entiers de l'intervalle $[1; 4033]$ qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 ? (0,25 pt)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère l'équation (E) : $iz^3 - (1+i)z^2 - (2+2i)z + 8i = 0$

- a) Vérifier que l'équation (E) admet une solution réelle à déterminer. (0,5 pt)
b) Déterminer les deux autres solutions de l'équation (E). (0,5 pt)
c) Placer les points A, B et C d'affixes respectives : -2 ; $2-2i$ et $1+i$. Déterminer la nature du triangle ABC. (0,75 pt)

2) Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que $x' = x + y$ et $y' = -x + y - 2$

- a) Donner l'expression complexe de s . (0,5 pt)
b) Dédire la nature et les éléments caractéristiques de s . Déterminer $s(C)$ (0,5 pt)

3) On désigne par z_G l'affixe du point G, centre de gravité du triangle ABC, et pour tout nombre complexe z on pose : $f(z) = |z+2|^2 + |z-2+2i|^2 + |z-1-i|^2$

- a) Justifier que $z_G = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$ et que $f(z) = 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3}$ (0,75 pt)

- b) Déterminer, suivant les valeurs du réel k , l'ensemble Γ_k des points M du plan d'affixes z tels que : $f(z) = k$. Déterminer l'ensemble Γ_{20} . (0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

ABCD est un rectangle direct tel que $CB = 2CD$ et soient E, F et O les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[AD]$ et $[AE]$. on pose $f = s_B \circ (A)$.

1.a) Faire une figure illustrant les données qu'on complétera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale. (0,25 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A vers E et E vers D. Préciser le centre et un angle de r . (0,75 pt)

c) On pose $f = s_{DE} \circ s_{BF} \circ s_{AE}$ déterminer $f(A)$ et $f(B)$ puis montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera la forme réduite. (0,75 pt)

2.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme O vers E et E vers B, déterminer le rapport et un angle de s . (0,75 pt)

b) Soit Ω le centre de s , montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs $[EF]$ et $[EI]$, construire Ω . (0,5 pt)

3) Soit M un point de Γ_1 différent de Ω et $M' = s(M)$

- a) Soient J et K les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[EI]$. Montrer que $s(J) = K$. En déduire que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$ (0,5 pt)

b) Montrer alors que la droite (MM') passe par un point fixe à préciser. (0,25 pt)

- c) En déduire une construction de M' à partir d'une position donnée de M . (0,25 pt)
- 4) Soit (P) la parabole de directrice (AD) et de foyer E. (0,25 pt)
- Déterminer le sommet de (P). (0,25 pt)
 - Montrer que (P) passe par B et C. (0,25 pt)
 - Déterminer les tangentes à (P) aux points B et C. (0,25 pt)
 - Montrer que (P) est la seule parabole de directrice (AD) passant par C et B. (0,25 pt)

Exercice 4 (4 points)

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on définit la fonction f_n sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = (\ln x)^n$ et on désigne par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et discuter $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ suivant la parité de n . (0,5 pt)
- Calculer $f'_n(x)$ dérivée de $f_n(x)$ et dresser le tableau de variations de f_n (suivant la parité de n) (0,75 pt)
- Etudier les positions relatives de (C_2) et (C_3) . (0,25 pt)
- Construire (C_2) et (C_3) dans le même repère. (0,5 pt)

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on pose : $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e f_n(x) dx$ et $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

- Montrer que $I_2 = \frac{e-2}{2}$ (on procédera par intégration par parties). (0,25 pt)
- Montrer que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on a : $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$ (0,25 pt)
- Vérifier que $I_2 = -1 + e \cdot u_2$ (0,25 pt)
- En déduire que $\forall n \geq 2, I_n = -1 + e \cdot u_n$ (0,25 pt)
- Montrer que : $\forall x \in [1; e], 0 \leq f_n(x) \leq 1$. Déduire que $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$ (0,5 pt)
- Déduire la limite de (I_n) puis celle de (u_n) (0,5 pt)

Exercice 5 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \\ f(0) = \ln 3 \end{cases}$$

- Montrer que : $\forall x \leq 0, e^x \leq 1$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ (0,75 pt)
- Déduire que : $\forall t > 0, \frac{1}{t} - t \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t}$ (0,25 pt)
- Montrer alors que $\forall x > 0, \ln 3 - 4x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$ (0,25 pt)
- Déduire que f est continue et dérivable en 0^+ , et que $f'_d(0) = 0$ (0,5 pt)

2) On considère la fonction g , définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t} dt$

- Justifier que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis déterminer sa dérivée $g'(x)$. (0,5 pt)
- Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = -g(x) + g(3x)$ (0,25 pt)
- Déduire que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} (e^{-8x^2} - 1)$ (0,5 pt)

3.a) On suppose que x est supérieur à 1; Montrer que : $\forall t \in [x; 3x], e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$ (0,25 pt)

b) En déduire que $\forall t \in [x; 3x], e^{-9x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \leq e^{-x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$ (0,25 pt)

c) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (0,25 pt)

d) Dresser le tableau de variation de f . Fin. (0,25 pt)

Corrigé

Exercice 1

1) a) Vérifions que 2017 est un nombre premier :

Comme $\sqrt{2017} \approx 44.9$, et les nombres premiers inférieurs à 45 sont :

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41 et 43 ; et comme 2017 n'est divisible par aucun de ces nombres, il est alors premier.

b- Vérifions que $(-5, 246)$ est solution de l'équation (E) : $2017x + 41y = 1$,

On a : $2017(-5) + 41 \times 246 = -10085 + 10086 = 1$

Donc le couple $(-5, 246)$ est solution de l'équation (E).

Résolution de l'équation (E) :

Comme $2017 \wedge 41 = 1$ alors l'équation (E) admet des solutions entières. Soit $(x; y)$ un couple solution de l'équation (E) :

$$2017x + 41y = 2017(-5) + 41(246) \Leftrightarrow 2017(x+5) = 41(246-y)$$

Donc 41 divise $2017(x+5)$ or $41 \wedge 2017 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : 41 divise $x+5$,

D'où il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x+5 = 41k$ soit $x = -5 + 41k$,

En remplaçant $x+5$ par $41k$ dans l'égalité $2017(x+5) = 41(246-y)$ on obtient $y = 246 - 2017k$.

$$\text{Donc } S = \{(-5 + 41k, 246 - 2017k); k \in \mathbb{Z}\}$$

c) Montrons qu'il existe un unique entier naturel y inférieur ou égal à 2016 tel que : $41y \equiv 1[2017]$

Soit y un entier naturel inférieur ou égal à 2016 vérifiant : $41y \equiv 1[2017]$

Il existe donc un entier x tel que $41y = 1 + 2017 \times (-x)$ soit $2017x + 41y = 1$ par conséquent $(x; y)$ est solution de l'équation (E) et $y = 246 - 2017k$, $k \in \mathbb{Z}$ $0 \leq 246 - 2017k \leq 2016$ d'où $-0,87 \leq k \leq 0,12$ donc $k = 0$ et $y = 246$

2) Soient a et b deux entiers relatifs

a) Montrons que si $a \cdot b \equiv 0[2017]$ alors $a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017]$

Si $ab \equiv 0[2017]$ et $a \not\equiv 0[2017]$ alors $\begin{cases} 2017 \mid ab \\ 2017 \wedge a = 1 \end{cases}$, car 2017 est premier

Donc d'après Gauss $2017 \mid b$ et $b \equiv 0[2017]$

Par conséquent soit $a \equiv 0[2017]$ ou $b \equiv 0[2017]$

b) Montrons que si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a \equiv 1[2017]$ ou $a \equiv -1[2017]$

Si $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a^2 - 1 \equiv 0[2017] \Rightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0[2017]$

D'après 2) a) soit $a-1 \equiv 0[2017]$ ou $a+1 \equiv 0[2017]$

$$a \equiv 1[2017] \text{ ou } a \equiv -1[2017]$$

c) Déterminons les entiers de l'intervalle $[1, 4033]$ qui sont égaux à leur inverse modulo 2017 :

Supposons qu'un entier a est égal à son inverse, c-à-d que $a^2 \equiv 1[2017]$ alors $a \equiv \pm 1[2017]$

Soit $a \equiv 1 \pmod{2017}$ [2017]

$$a = 2017k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1 \leq a \leq 4033$$

$$1 \leq 2017k + 1 \leq 4033$$

$$0 \leq k \leq \frac{4033}{2017}$$

$$0 \leq k \leq 1,99$$

$$\Rightarrow k = 0, \text{ ou } k = 1$$

$$a = 1 \text{ ou } a = 2018$$

ou bien $a \equiv -1 \pmod{2017}$ [2017]

$$a = 2017k - 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1 \leq a \leq 4033$$

$$1 \leq 2017k - 1 \leq 4033$$

$$2 \leq 2017k \leq 4034$$

$$0,0009 \leq k \leq 2$$

$$\Rightarrow k = 1 \text{ ou } k = 2$$

$$a = 2016 \text{ ou } a = 4033$$

Donc les entiers de l'intervalle $[1, 4033]$ qui sont égaux à leurs inverses modulo 2017 sont $\{1, 2018, 2016, 4033\}$.

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère l'équation (E) : $iz^3 - (1+i)z^2 - (2+2i)z + 8i = 0$

a) Vérifions que l'équation (E) admet une solution réelle

Si a est une solution réelle de l'équation (E) alors

$$ia^3 - (1+i)a^2 - (2+2i)a + 8i = 0$$

$$ia^3 - a^2 - ia^2 - 2a - 2ia + 8i = 0$$

$$-a^2 - 2a + i(a^3 - a^2 - 2a + 8) = 0$$

$$\begin{cases} -a^2 - 2a = 0 & \text{(i)} \\ a^3 - a^2 - 2a + 8 = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Donc de (i) : soit $a = 0$ ou $a = -2$ or -2 vérifie (ii) et 0 ne vérifie pas (ii)

Donc l'équation (E) admet la solution réelle $a = -2$

b) Déterminons les deux autres solutions de l'équation (E), pour cela utilisons le tableau d'Horner :

	i	$-1 - i$	$-2 - 2i$	$8i$
-2		$-2i$	$2 + 6i$	$-8i$
	i	$-1 - 3i$	$4i$	0

$$\text{Alors (E) : } (z+2)(iz^2 - (1+3i)z + 4i) = 0$$

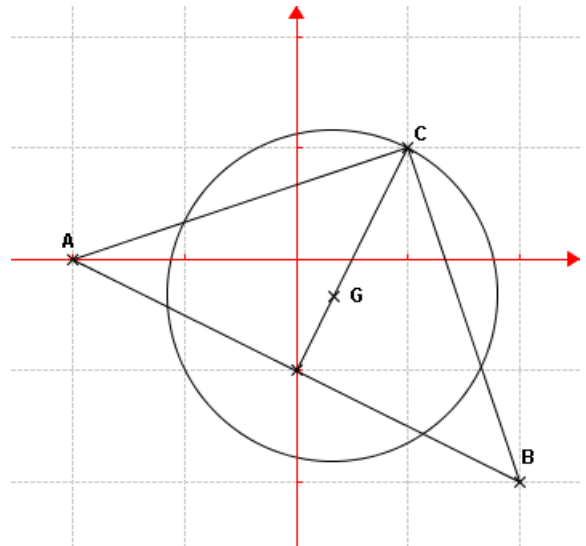
$$\text{Donc : soit } z+2=0 \text{ et } z = -2$$

$$\text{Ou } iz^2 - (1+3i)z + 4i = 0$$

$$\Delta = (1+3i)^2 + 16 = 8 + 6i = (3+i)^2$$

Et les solutions de l'équation (E) autre que -2 sont $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = 1 + i$

c) Plaçons les points A, B et C d'affixes respectives : -2 ; $2 - 2i$ et $1 + i$



La nature du triangle ABC

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-2 - (1+i)}{2 - 2i - (1+i)} = \frac{-3-i}{1-3i} = \frac{-i(-3i+1)}{1-3i} = i$$

Puisque $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i$ alors le triangle ABC est rectangle et isocèle, direct en C

2) Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que $x' = x + y$ et $y' = -x + y - 2$

a) L'expression complexe de s :

Si $M(x;y)$ est un point d'affixe z dont l'image par s est le point $M'(x';y')$ d'affixe z' alors

$$\begin{aligned} x' + iy' &= x + y + i(-x + y - 2) \\ &= x + y - ix + iy - 2i \\ &= x + iy - ix + y - 2i \\ &= x(1-i) + iy(1-i) - 2i \\ &= (1-i)[x + iy] - 2i \end{aligned}$$

Alors l'expression complexe de s est : $z' = (1-i)z - 2i$

Pour déterminer $s(C)$ on a $z'_C = (1-i)z_C - 2i = (1-i)(1+i) - 2i = 2 - 2i = z_B$. Alors $s(C) = B$.

b) La nature et les éléments caractéristiques de s :

$$\text{On a } z' = (1-i)z - 2i \text{ et } \begin{cases} |1-i| = \sqrt{2} \\ \arg(1-i) = \frac{-\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

Alors s est une similitude directe de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\alpha = \frac{-\pi}{4} [2\pi]$ et son centre est d'affixe

$$w = \frac{-2i}{1 - (1-i)} = \frac{-2i}{i} = -2 = z_A \text{ le centre de } s \text{ est } A$$

Donc s est la similitude directe de centre A , rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\alpha = \frac{-\pi}{4} [2\pi]$

3) On désigne par z_G l'affixe du point G , centre de gravité du triangle ABC, et pour tout nombre complexe

$$z \text{ on pose : } f(z) = |z+2|^2 + |z-2+2i|^2 + |z-1-i|^2$$

a) Montrons que $z_G = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$ et que $f(z) = 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3}$

On sait que G est le centre de gravité du triangle ABC, d'où l'affixe de G est

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-2 + 2 - 2i + 1 + i}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$$

Calculons $f(z)$:

$$\text{On a : } f(z) = |z+2|^2 + |z-2+2i|^2 + |z-1-i|^2$$

Alors $f(z) = MA^2 + MB^2 + MC^2$ donc f est la fonction scalaire de Leibniz associée au système $\{(A,1); (B,1); (C,1)\}$ et l'écriture réduite de f est $f(z) = 3MG^2 + f(z_G)$

$$\text{Or } f(z_G) = \frac{f(z_A) + f(z_B) + f(z_C)}{2(1+1+1)}$$

$$\text{Puisque } f(z_A) = AB^2 + AC^2 = |z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2 = |2 - 2i + 2|^2 + |1 + i + 2|^2 = 20 + 10 = 30$$

$$f(z_B) = BA^2 + BC^2 = 20 + 10 = 30$$

$$f(z_C) = CA^2 + CB^2 = 10 + 10 = 20$$

$$\text{Donc } f(z_G) = \frac{80}{6} = \frac{40}{3} \text{ et } f(z) = 3MG^2 + \frac{40}{3}$$

$$\text{Finalement } f(z) = 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3}$$

d) Déterminons, suivant les valeurs du réel k , l'ensemble Γ_k des points M du plan d'affixes z tels que :

$$f(z) = k$$

$$f(z) = k \Leftrightarrow 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3} = k$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + \frac{40}{3} = k$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{3k - 40}{9} \text{ Alors}$$

- Si $k < \frac{40}{3}$ alors l'ensemble Γ_k est vide
- Si $k = \frac{40}{3}$ alors l'ensemble Γ_k est réduit au point G
- Si $k > \frac{40}{3}$ alors Γ_k est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{3k - 40}{9}}$

Déterminons l'ensemble Γ_{20}

Comme $20 > \frac{40}{3}$, Γ_{20} est donc un cercle de centre G . Or $f(z_C) = 20$ alors $C \in \Gamma_{20}$ par conséquent Γ_{20} est le cercle de centre G passant par C .

Exercice 3

ABCD est un rectangle direct tel que $CB = 2CD$ et soient E , F et O les milieux respectifs des segments $[CB]$, $[AD]$ et $[AE]$. on pose $I = s_B(A)$.

1.a) Figure : (voir la figure ci-contre).

b) Montrons qu'il existe une unique rotation r qui transforme A vers E et E vers D

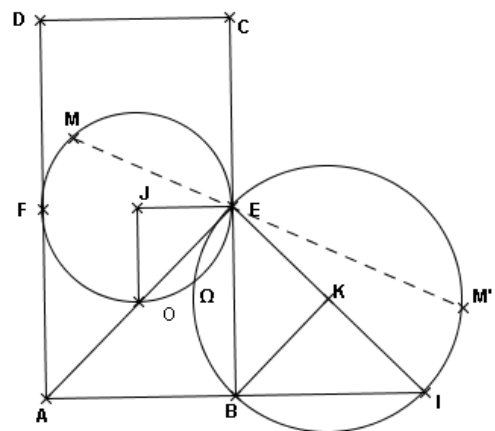
$$\text{Comme } \overline{AE} = \overline{ED} = \overline{AB}\sqrt{2} \text{ (non nul)}$$

Donc il existe un déplacement r qui transforme A vers E et E vers D , or $\overline{AE} \neq \overline{ED}$ donc r est une rotation.

$$\text{Le centre de } r \text{ est le point } \{T\} = \text{med}[AE] \cap \text{med}[ED] = (CF) \cap (BF)$$

$$\text{Donc } T = F$$

$$\text{Un angle de } r \text{ est } (\overline{AE}, \overline{ED}) = (\overline{EA}, \overline{ED}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$



Alors r est la rotation de centre F et d'angle $\frac{\pi}{2}$

c) On pose $f = s_{DE} \circ s_{BF} \circ s_{AE}$ déterminons $f(A)$ et $f(B)$

$$\text{On a } f(A) = s_{DE} \circ s_{BF} \circ s_{AE}(A) = s_{DE} \circ s_{BF}(A) = s_{DE}(E) = E$$

$$\text{Et } f(B) = s_{DE} \circ s_{BF} \circ s_{AE}(B) = s_{DE} \circ s_{BF}(F) = s_{DE}(F) = C$$

Montrons que f est une symétrie glissante :

f est la composée d'un nombre impair d'antidéplacements alors f est un antidéplacement.

D'autre part $f(A) = E$ et $f(B) = C$ et $\text{med}[AE] \neq \text{med}[BC]$ donc f n'est pas une réflexion d'où f est une symétrie glissante.

Déterminons la forme réduite de f

Comme $f(A) = E$ et $f(B) = C$ alors l'axe de f passe par les points O et E , milieux respectifs des segments $[AE]$ et $[BC]$ par conséquent l'axe de f est la droite (AE) .

Soit \vec{u} un vecteur de f alors $f = t_{\vec{u}} \circ s_{AE}$

Et comme $f(B) = C$ alors $t_{\vec{u}} \circ s_{AE}(B) = C$ d'où $t_{\vec{u}}(F) = C$ et $\vec{u} = \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AE}$

La forme réduite de f est donc $f = t_{\overrightarrow{AE}} \circ s_{AE} = s_{AE} \circ t_{\overrightarrow{AE}}$

2.a) Montrons qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme O vers E et E vers B , déterminons le rapport et un angle de s

Comme $O \neq E$ et $E \neq B$ donc il existe une unique similitude directe s qui transforme O vers E et E vers B .

Le rapport de s : $k = \frac{EB}{OE} = \frac{EB}{\frac{\sqrt{2}}{2}EB} = \sqrt{2}$

Un angle de s : $\alpha = (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EB}) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$

b) Soit Ω le centre de s , montrons que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs $[EF]$ et $[EI]$

$s(O) = E$ d'où $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$ et $2(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ or $2(\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc les points Ω , O , E et F sont cocycliques, donc Ω appartient au cercle circonscrit au triangle OEF , cercle de diamètre $[EF]$. Alors $\Omega \in \Gamma_1$

De même $s(E) = B$ donc $(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega B}) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$ et $2(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IB}) [2\pi]$ donc les points Ω , I , B et E sont cocycliques. Alors $\Omega \in \Gamma_2$

Comme $s(E) = B \neq E$ alors Ω est le point d'intersection de Γ_1 et Γ_2 autre que E (voir la figure)

3) Soit M un point de Γ_1 différent de Ω et $M' = s(M)$

a) Soient J et K les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[EI]$. Montrons que $s(J) = K$. En et que

$$s(\Gamma_1) = \Gamma_2$$

La similitude s transforme O vers E et E vers B et le triangle OEJ est isocèle et rectangle, direct en J, donc l'image de J est le point J' tel que le triangle EBJ' soit isocèle et rectangle, direct en J'. D'où $J' = K$ et $s(J) = K$

Γ_1 est le cercle de centre J passant par O, alors son image par s est le cercle de centre K passant par E, soit Γ_2 . Donc $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$

b) Montrons alors que la droite (MM') passe par un point fixe à préciser.

En remarquant que $s(O) = E$ et $s(E) = B$ (les points E et O sont de Γ_1) et que les droites (OE) et (EB) se coupent en E, Montrons que pour tout point $M \in \Gamma_1$ la droite (MM') passe par E :

- Si $M = E$ on a $M' = B$ et la droite (EB) passe par E.

- Si $M \neq E$ on a :

$$2(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EM'}) = 2(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{E\Omega}) + 2(\overrightarrow{E\Omega}, \overrightarrow{EM'})[2\pi]$$

$$2(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EM'}) = (\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{J\Omega}) + (\overrightarrow{K\Omega}, \overrightarrow{KM'})[2\pi]$$

$$2(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EM'}) = (\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{J\Omega}) - (\overrightarrow{KM'}, \overrightarrow{K\Omega})[2\pi]$$

$$J \rightarrow K$$

Or $s \begin{cases} M \rightarrow M' \\ \Omega \rightarrow \Omega \end{cases}$ et par conservation des angles orientés on a $(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{J\Omega}) = (\overrightarrow{KM'}, \overrightarrow{K\Omega})[2\pi]$

$$\Omega \rightarrow \Omega$$

Donc $2(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EM'}) = 0[2\pi]$. Alors la droite (MM') passe par E.

Déterminons une construction de M' à partir d'une position donnée de M :

Pour une position donnée de M sur Γ_1 ($M \neq E$), le point M' est le point d'intersection de Γ_2 et (ME) autre que E.

4) Soit (P) la parabole de directrice (AD) et de foyer E.

a) Déterminons le sommet de (P)

Le foyer E se projette orthogonalement en F sur la directrice (AD), alors le sommet de la parabole (P) est le point J, milieu du segment $[EF]$

b) Montrons que (P) passe par B et C

Comme A est le projeté orthogonal de B sur (AD) et $BA = BE$, (E est le foyer de (P)) alors B appartient à (P).

De même D est le projeté orthogonal de C sur (AD) et $CD = CE$ alors C appartient à (P)

c) Déterminons les tangentes à (P) aux points B et C

- Le foyer de (P) est le point E, et A est le projeté orthogonal de B sur (AD). Donc la tangente à (P) en B est la médiatrice du segment $[AE]$, c'est donc la droite (BF)

- De même la tangente à (P) en C est la médiatrice de $[DE]$, c'est donc la droite (CF)

- d) Montrons que (P) est la seule parabole de directrice (AD) passant par C et B

Soit (P') une parabole de directrice (AD) passant par C et B, alors son foyer est le point d'intersection des cercles de centres B et C et tangents à (AD). Or ces cercles sont tangents en E. Par conséquent (P') est de foyer E, de directrice (AD) et passe par B et C.

Alors $(P) = (P')$.

Donc (P) est la seule parabole de directrice (AD) passant par C et B.

Exercice 4 :

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, la fonction f_n est définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $f_n(x) = (\ln x)^n$ et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1.a) Calcul de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^n = +\infty$$

Discussion de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ suivant la parité de n : comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ alors :

Si n est pair : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$

Si n est impair : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty$

b) Calcul de $f'_n(x)$ dérivée de $f_n(x)$ et le tableau de variations de f_n (suivant la parité de n) :

La dérivée de $f_n(x)$ est : $f'_n(x) = n \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{n-1} = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$

Si n est impair alors $n-1$ est pair, et par conséquent $(\ln x)^{n-1} \geq 0$, d'où le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
$f_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Si n est pair alors $n-1$ est impair, d'où le signe de $(\ln x)^{n-1}$ est celui de $\ln x$, d'où le tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	0
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

2.a) Etudions les positions relatives de (C_2) et (C_3) , pour cela étudions le signe de $f_3(x) - f_2(x)$:

$$f_3(x) - f_2(x) = (\ln x)^3 - (\ln x)^2 = (\ln x)^2 (\ln x - 1)$$

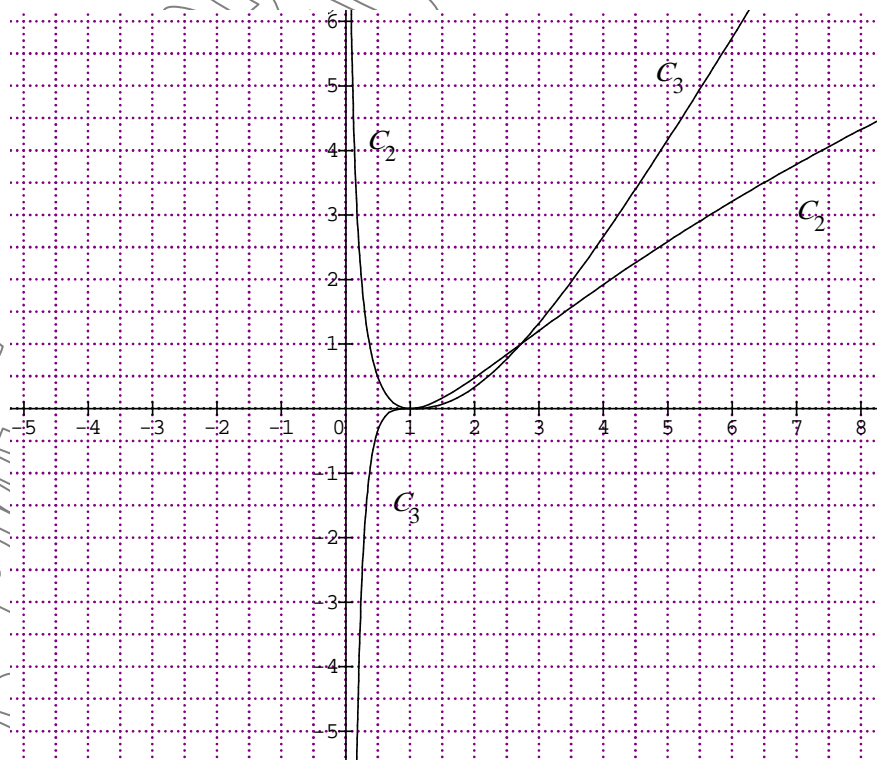
Donc :

X	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)^2$	+	0	+	+
$\ln x - 1$	-	0	+	+
$f_3(x) - f_2(x)$	-	0	0	+
Positions relatives	$(C_2)/(C_3)$	PI	$(C_2)/(C_3)$	PI $(C_3)/(C_2)$

b) Construction (C_2) et (C_3) dans le même repère :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = 0$ alors chacune des courbes (C_2) et (C_3) admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = -\infty$, alors chacune des courbes (C_2) et (C_3) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$



Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on pose : $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e f_n(x) dx$ et $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

3) a) Utilisons une intégration par parties pour montrer que $I_2 = \frac{e-2}{2}$

$$I_2 = \frac{(-1)^1}{2!} \int_1^e f_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$\text{On pose : } u(x) = (\ln x)^2 \Rightarrow u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } I_2 &= \frac{1}{2} \left(\left[x (\ln x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} e - 0 - \int_1^e \ln x dx \end{aligned}$$

$$\text{Calculons } \int_1^e \ln x dx$$

$$\text{On pose } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$\text{Alors } \int_1^e \ln x dx = \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx = \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - e - (0 - 1) = 1$$

$$\text{Donc } I_2 = \frac{e - 2}{2}$$

b) Montrons que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on a : $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$

$$\text{On a : } I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_1^e f_{n+1}(x) dx$$

$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$$

Utilisons une intégration par parties

$$\text{On pose } u(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\left[x (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx \right)$$

$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(e - 0 - (n+1) \frac{n!}{(-1)^n} \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e f_n(x) dx \right)$$

$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(e - (n+1) \frac{n!}{(-1)^n} I_n \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(e + \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}} I_n \right)$$

$$\text{Donc } I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$$

c) Vérifions que $I_2 = -1 + e.u_2$

Nous savons que $I_2 = \frac{e-2}{2}$ alors

$$I_2 = -1 + \frac{e}{2} = -1 + \frac{1}{2}e = -1 + \left(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^0}{0!} \right) e$$

$$\text{Car } \frac{1}{2} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} = u_2$$

Donc $I_2 = -1 + e.u_2$

d) Dédisons que $\forall n \geq 2, I_n = -1 + e.u_n$. Par récurrence

Initialisation :

Pour $n = 2$: $I_2 = -1 + e.u_2$ Donc la relation est vérifiée pour $n = 2$

Hérédité :

Supposons que $I_n = -1 + eU_n$ et montrons que $I_{n+1} = -1 + eU_{n+1}$

On sait que $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$ et d'après l'hypothèse $I_n = -1 + eU_n$

$$\text{Donc } I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + (-1 + eU_n) = -1 + e \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

$$\text{d'où } I_{n+1} = -1 + e \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} \right) \text{ et } I_{n+1} = -1 + eU_{n+1}$$

Conclusion: $\forall n \geq 2, I_n = -1 + eU_n$

4.a) Montrons que : $\forall x \in [1; e], 0 \leq f_n(x) \leq 1$.

Nous avons déjà vu que pour tout n supérieur strictement à 1, f_n est croissante sur $[1; e]$ alors

$$1 \leq x \leq e$$

$$f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(e)$$

$$0 \leq f_n(x) \leq 1$$

Dédisons que $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$

$$\text{On a } |I_n| = \frac{1}{n!} \int_1^e f_n(x) dx \text{ car } f_n \text{ est positive sur } [1; e]$$

Or $0 \leq f_n(x) \leq 1$ donc par intégration obtient $0 \leq \int_1^e f_n(x) dx \leq [x]_1^e$

$0 \leq \int_1^e f_n(x) dx \leq e-1$ En multipliant par $\frac{1}{n!}$ on obtient $0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^e f_n(x) dx \leq \frac{e-1}{n!}$

Alors $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$

b) Dédudons la limite de (I_n) puis celle de (u_n)

On a $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$ donc $-\frac{e-1}{n!} \leq I_n \leq \frac{e-1}{n!}$

Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Calcul de La limite de (u_n)

Comme $I_n = -1 + eU_n$ alors $U_n = \frac{I_n + 1}{e}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{0 + 1}{e} = \frac{1}{e}$

Exercice 5 :

La fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \\ f(0) = \ln 3 \end{cases}$

1.a) Montrons que : $\forall x \leq 0, e^x \leq 1$

La fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} , donc si $x \leq 0$ alors $e^x \leq e^0$ soit $e^x \leq 1$

Montrons alors que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x+1$

On pose, $h(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$ alors $h'(x) = e^x - 1$,

Or, $\forall x \leq 0, e^x - 1 \leq 0$ et $\forall x \geq 0, e^x - 1 \geq 0$ alors

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$			
		0	

Alors d'après le tableau de variation de $h \forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x+1$

b) Dédurre que : $\forall t > 0, \frac{1}{t} - t \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t}$

D'après la question 1.a) on a $-t^2 + 1 \leq e^{-t^2} \leq 1$

En divisant par $t, t > 0$ on obtient $\frac{-t^2 + 1}{t} \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t}$

Alors $\frac{1}{t} - t \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t}$

c) Montrons alors que $\forall x > 0, \ln 3 - 4x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$

On a $\frac{1}{t} - t \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \frac{1}{t}$

Alors $\int_x^{3x} \left(\frac{1}{t} - t \right) dt \leq \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$

$$\left[\ln t - \frac{1}{2} t^2 \right]_x^{3x} \leq f(x) \leq \left[\ln t \right]_x^{3x}$$

$$\ln(3x) - \frac{9x^2}{2} - \left(\ln x - \frac{x^2}{2} \right) \leq f(x) \leq \ln(3x) - \ln x$$

$$\ln 3 - \left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \leq f(x) \leq \ln 3 \quad \text{En effet } \ln(3x) - \ln x = \ln\left(\frac{3x}{x}\right) = \ln 3$$

Donc $\ln 3 - 4x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$

d) Dédurre que f est continue et dérivable en 0^+ , et que $f'_d(0) = 0$.

On a $\forall x > 0, \ln 3 - 4x^2 \leq f(x) \leq \ln 3$ et $f(0) = \ln 3$

Par passage aux limites, en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln 3$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. D'où f est continue en 0^+

D'autre part on a $-4x^2 \leq f(x) - f(0) \leq 0$

Comme $x > 0$ alors $\frac{-4x^2}{x} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0$

$$-4x \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

Alors f est dérivable à droite de 0 et $f'_d(0) = 0$.

3) La fonction g est définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t} dt$

a) Montrons que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminons sa dérivée $g'(x)$

comme $\frac{e^{-t^2}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et g est la primitive de $\frac{e^{-x^2}}{x}$ qui s'annule en 1 alors g est dérivable sur

$]0, +\infty[$ et sa dérivée est $g'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

b) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = -g(x) + g(3x)$

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t^2}}{t} dt + \int_1^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt = -\int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t} dt + \int_1^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$$

Donc $f(x) = -g(x) + g(3x)$

c) Montrons que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} (e^{-8x^2} - 1)$

On a f est la somme et la composée des fonctions $x \rightarrow -g(x)$, $x \rightarrow g(x)$, et $x \rightarrow 3x$, dérivables sur $]0, +\infty[$ donc f est dérivable sur le même intervalle. Sa dérivée est :

$$f'(x) = -g'(x) + 3 \times g'(3x) = -\frac{e^{-x^2}}{x} + 3 \times \frac{e^{-(3x)^2}}{3x} = -\frac{e^{-x^2}}{x} + \frac{e^{-9x^2}}{x}$$

Donc $f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} (e^{-8x^2} - 1)$, $\forall x > 0$

3.a) On suppose que x est supérieur à 1; Montrons que : $\forall t \in [x; 3x]$, $e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$

$$\forall x \geq 1, \forall t \in [x; 3x], x^2 \leq t^2 \leq 9x^2$$

Donc $-9x^2 \leq -t^2 \leq -x^2$ alors $e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$

b) Montrons que $\forall x \geq 1, \forall t \in [x; 3x]$, $e^{-9x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \leq e^{-x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$

Comme $e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$ et $t > 0$ alors $e^{-9x^2} \frac{1}{t} \leq e^{-t^2} \frac{1}{t} \leq e^{-x^2} \frac{1}{t}$

Par intégration $\int_x^{3x} \frac{e^{-9x^2}}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{e^{-x^2}}{t} dt$

Donc $e^{-9x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{3x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \leq e^{-x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$

d) Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

De la relation $e^{-9x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt \leq f(x) \leq e^{-x^2} \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt$

On obtient $e^{-9x^2} [\ln t]_x^{3x} \leq f(x) \leq e^{-x^2} [\ln t]_x^{3x}$

$$e^{-9x^2} \times \ln 3 \leq f(x) \leq e^{-x^2} \times \ln 3$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-9x^2} = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

e) Le tableau de variation de f :

- La dérivée $f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} (e^{-8x^2} - 1) < 0$

Car : $e^{-8x^2} - 1 < 0$. En effet $-8x^2 < 0$ et $e^{-8x^2} < 1$

Et $\frac{e^{-x^2}}{x} > 0, \forall x > 0$

- D'autre part $f(0) = \ln 3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

On peut donc dresser le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$\ln 3$	0

