République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Baccalauréat 2017
Session Normale

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) a- Soit a un nombre réel, résoudre dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue z : $(1+i)z^2 - 2(a+1)z - (-1+i)(a^2+1) = 0$ **(1 pt)**

b- Soient f et g les transformations données par leurs expressions complexes $f: z \to z' = 1 - iz$ et $g: z \to z'' = z - i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations f et g. **(0,5 pt)**

Dans le reste de l'exercice on considère les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 1 - ia$ et $z_2 = a - i$ où $a = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \left]0, 2\pi\right[$

2) a- Montrer que le triangle IM_1M_2 est rectangle en I, isocèle et direct. **(0,5 pt)**

b- Préciser les lieux géométriques de chacun des points M_1 et M_2 lors que α décrit l'intervalle $\left]0, \pi\right[$ **(0,5 pt)**

c- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle pour α appartenant à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. **(0,5 pt)**

3) Soit M_3 le point d'affixe $z_3 = i\sin\alpha + ia$ et soit G l'isobarycentre des points M_1, M_2 et M_3

a- Vérifier que $z_G = \frac{1+\cos\alpha}{3} + i\frac{(-1+2\sin\alpha)}{3}$ puis montrer que, pour $\alpha \in \left]0, \pi\right[$, le point G appartient à une ellipse Γ dont on donnera une équation. **(0,5 pt)**

b- Préciser les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent. **(0,5 pt)**

Exercice 2 (6 points)

ABC est un triangle équilatéral direct de coté 4 cm, et de cercle circonscrit Γ, les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On pose $A' = s_B(A)$.

1) a- Faire une figure illustrant les données que l'on complétera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale. **(0,75 pt)**

b- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g vérifiant $g(B) = A$ et $g(A') = B$. Vérifier que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. **(0,75 pt)**

c- Soit r la rotation qui transforme C en B et J en K. Déterminer un angle et le centre de r. **(0, 5 pt)**

2) Soit s la similitude directe qui transforme A en B et C en I, et on pose $h = s \circ r$

a- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de s. **(0, 5 pt)**

b- Soit Ω le centre de s. Montrer que $\Omega \in \Gamma$ et que les points Ω, A et I sont alignés. Placer alors Ω. **(0, 5 pt)**

c- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h. **(0, 5 pt)**

3) Soit M un point de Γ distinct de Ω, on pose $M' = s(M)$ et $M_1 = r(M)$

a- Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle. **(0, 5 pt)**

b- Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera. **(0, 5 pt)**

c- Montrer que les points M_1, M et M' sont alignés. **(0, 25 pt)**

4) On pose $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = s(M_n)$

a- Déterminer M_1 et construire M_2. **(0, 25 pt)** b) Vérifier que $M_{2017} \in (\Omega B)$ **(0, 5 pt)**

b- Pour tout entier naturel n, on pose $L_n = M_nM_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} L_k$ exprimer S_n en fonction de n, puis déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$. **(0, 5 pt)**

Exercice 3 (5 points)

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) **Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer.** (0,5 pt)

2) **a- Dresser le tableau de variation de f_0.** (0,5 pt)

b- On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées de A, milieu de $[MN]$, que représente A pour (C_0) ? (0,5 pt)

3) **a- Montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.** (0,25 pt)

b- Déduire le tableau de variation de f_1 (0,25 pt)

c- Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère. (0,5 pt)

4) **On suppose que n est strictement supérieur à 1.**

a- Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=0$ et $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=+\infty$ puis calculer $\lim_{x\to-\infty}\frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter. (0,75 pt)

b- Calculer f_n' et dresser le tableau de variation de f_n. (0, 5 pt)

5) **Soit (u_n) la suite définie par : $u_n=\int_0^1 f_n(x)dx,\ n\in\mathbb{N}$**

a- Justifier l'existence de (u_n) puis vérifier que $u_0=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ (0,5 pt)

b- Vérifier que $u_0+u_1=1$ et que $u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}$ puis déduire u_1 et u_2 (0,5 pt)

c- Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite. (0,25 pt)

<u>Exercice 4 (5 points)</u>

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

1) a- Dresser le tableau de variation de f. (0, 75 pt)

b- Déduire que pour tout entier $n\ge 6$, l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1,\sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n (0, 25 pt)

c- Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge. (0,5 pt)

2) a- Montrer que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\le\int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x^2}dx\le\frac{\ln k}{k^2}$ (0,5 pt)

b- Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\int_2^n\frac{\ln x}{x^2}dx,\ n\ge 2$. (0,5 pt)

3) Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on pose : $S_n=\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\frac{\ln 4}{4^2}+....+\frac{\ln n}{n^2}$

a- Montrer que $S_n-\frac{\ln(2)}{(2)^2}\le\int_2^n\frac{\ln x}{x^2}dx\le S_n-\frac{\ln(n)}{(n)^2}$ (0,5 pt)

b- En déduire que : $\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2}\le S_n\le\frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln(n)}{n}$ (0,25 pt)

4) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et $I_n=\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$

a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ 0\le I_n\le\frac{(\ln 2)^n}{n!}$ En déduire la limite de I_n (0,5 pt)

b- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_{n+1}=I_n-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$ (0,5 pt)

c- En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ I_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+....\frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$ (0,25 pt)

d- Exprimer (u_n) en fonction de I_n. En déduire la limite de (u_n). (0,5 pt)

Fin.

Corrigé

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) a- Soit a un nombre réel, résolvons dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue z : $(1+i)z^2-2(a+1)z-(-1+i)(a^2+1)=0$

$\Delta=\left(-2(a+1)\right)^2-4(1+i)(1-i)(a^2+1)=-4a^2+8a-4=-4\left(a^2-2a+1\right)$ $\Delta=\left(2(a-1)i\right)^2$

Donc l'équation admet deux solutions:

$$z_1=\frac{2(a+1)+2(a-1)i}{2(1+i)}=\frac{a+ai+1-i}{1+i}=a-i$$

$$z_2=\frac{2(a+1)-2(a-1)i}{2(1+i)}=\frac{a-ai+1+i}{1+i}=1-ai$$

$$S=\left\{a-i,1-ia\right\}$$

b- Soient f et g les transformations données par leurs expressions complexes $f:z\mapsto z'=1-iz$ et $g:z\mapsto z''=z-i$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations f et g.

$f(z)=-iz+1$ **comme** $|-i|=1$ **et** $-i\notin\mathbb{R}$

Alors f est une rotation d'angle $\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ **et de centre le point Ω d'affixe**

$\frac{1}{1-(-i)}=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ **. Donc** $\Omega\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

$g(z)=z-i$

g est la translation de vecteur d'affixe $(-i)$.C'est à dire le vecteur $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

2) Les points I, M_1 et M_2 sont d'affixes respectives $z_0=1-i$, $z_1=1-ia$ **et** $z_2=a-i$ **où** $a=e^{i\alpha}$, $\alpha\in\left]0,2\pi\right[$

a) On a $\frac{z_I-z_{M_2}}{z_I-z_{M_1}}=\frac{1-i-a+i}{1-i-1+ia}=\frac{1-a}{i\left(-1+a\right)}=-\frac{1}{i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc $IM_1=IM_2$ **et** $\left(\overrightarrow{IM_1},\overrightarrow{IM_2}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Alors le triangle IM_1M_2 est rectangle en I, isocèle et direct.

b) Pour déterminer le lieu géométrique du point M_1 lorsque α décrit l'intervalle $\left]0,\pi\right[$ on constate que $z_1=1-ia\Rightarrow z_1-1=-ie^{i\alpha}=e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$

Alors $\begin{cases}|z_1-1|=1\\ \arg\left(z_1-1\right)=\alpha-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Soit A le point d'affixe $z_A=1$. Alors $\begin{cases}AM_1=1\\ \left(\vec{u},\overrightarrow{AM_1}\right)=\alpha-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

Donc M_1 appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

En plus $0<\alpha<\pi\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<\alpha-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$ **, alors** $-\frac{\pi}{2}<\left(\vec{u},\overrightarrow{AM_1}\right)<\frac{\pi}{2}$

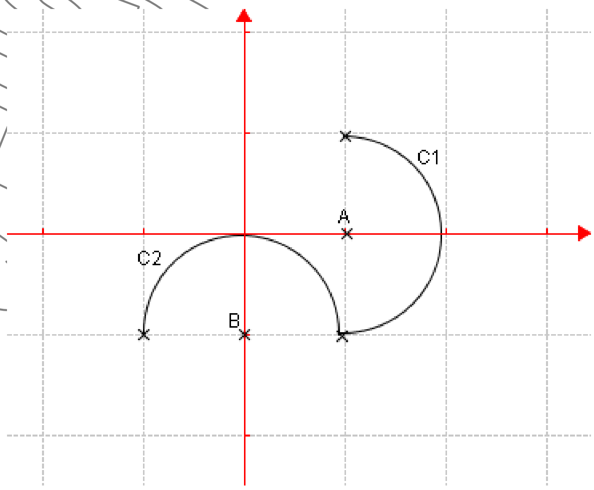
Donc lorsque α décrit l'intervalle $]0,\pi[$, M_1 décrit le demi- cercle (C_1) de centre A et de rayon 1, situé à droite de la droite d'équation $x=1$ d'extrémités exclues.

Pour le point M_2 :

$z_2 = a - i \Leftrightarrow z_2 + i = a \Leftrightarrow z_2 + i = e^{i\alpha}$ **. Alors** $\begin{cases} |z_2 + i| = 1 \\ \arg(z_2 + i) = \alpha \end{cases}$.

Soit B le point d'affixe $z_B = -i$. Alors

$$\begin{cases} BM_2 = 1 \\ \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM_2}\right) = \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$



M_2 appartient au cercle de centre B et de rayon.

D'autre part, lorsque α décrit l'intervalle $]0,\pi[$,

on a $0 < \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM_2}\right) < \pi \quad [2\pi]$.

Alors M_2 décrit le demi- cercle (C_2) de centre B et de rayon 1, situé au dessus de la droite d'équation $y=-1$ d'extrémités exclues.

c) Pour écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle, on procède à des modifications d'écriture :

Pour α appartenant à l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $z_1 = 1 - ia \Rightarrow z_1 = 1 - ie^{i\alpha} = e^{i0} + e^{i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

.

Le module de z_1 est $\left|2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|$. Son argument dépend du signe de $2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$:

Lorsque α décrit l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a alors $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ et

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} < 0 \text{ . D'où } \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

Donc $|z_1| = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ **et** $\arg z_1 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où la forme exponentielle de z_1 est : $z_1 = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

$$z_2 = -i + a = e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\alpha} = 2\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Le module de z_2 est $\left|2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$. Son argument dépend du signe de $2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$:

Lorsque α décrit l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a alors $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ et

$$\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \text{ . D'où } \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

Donc $|z_2| = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ et $\arg z_2 = \frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où la forme exponentielle de z_2 est : $z_2 = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

3) Soit M_3 le point d'affixe $z_3 = i\sin\alpha + ia$

a) Le point G est l'isobarycentre des points M_1, M_2 et M_3. On a alors :

$$z_G = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

$$z_G = \frac{1-ia+a-i+i\sin\alpha+ia}{3}$$

$$z_G = \frac{1+a-i+i\sin\alpha}{3}$$

$$z_G = \frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha-i+i\sin\alpha}{3}$$

$$z_G = \frac{1+\cos\alpha}{3}+i\frac{(-1+2\sin\alpha)}{3}$$

En posant $z_G = x+iy$ on a alors :

$$G(x,y) \Rightarrow x+iy = \frac{1+\cos\alpha}{3}+i\frac{(-1+2\sin\alpha)}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+\cos\alpha}{3} \\ y = \dfrac{-1+2\sin\alpha}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\cos\alpha \\ y+\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \cos\alpha \\ \dfrac{y+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \cos^2\alpha \\ \dfrac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sin^2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$$

Alors G appartient à l'ellipse d'équation $\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Le centre de Γ est le point $\Omega\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$:

L'équation réduite de l'ellipse Γ est $\frac{X^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$; avec $\begin{cases} X=x-\frac{1}{3} \\ Y=y+\frac{1}{3} \end{cases}$

Les sommets de Γ sont : $A\left(\frac{1}{3};0\right), A'\left(-\frac{1}{3};0\right), B\left(0;\frac{2}{3}\right), B'\left(0;-\frac{2}{3}\right)$.

Alors dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les sommets de Γ ont pour coordonnées :

$$A\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right), A'\left(0;-\frac{1}{3}\right), B\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), B'\left(\frac{1}{3};-1\right).$$

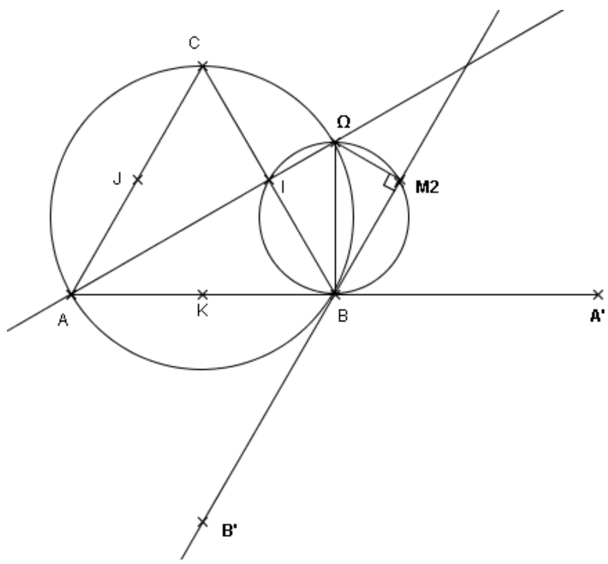
Pour calculer l'excentricité on a $e=\frac{c}{b}$ avec $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $a=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{2}{3}$.

Donc $c=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{9}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. D'où $e=\frac{c}{b}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2

1.a) Figure

ABC est un triangle équilatéral direct de coté 4 cm, et de cercle circonscrit Γ, les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. $A'=s_B(A)$.



b) Comme $A'=s_B(A)$, B est le milieu de $[AA']$. Donc $BA'=AB\neq 0$. Alors il existe un unique antidéplacement g vérifiant $g(B)=A$ et $g(A')=B$.

Les médiatrices des segments $[BA]$ et $[A'B]$ sont différentes. Alors l'antidéplacement g est une symétrie glissante.

On peut aussi remarquer que $g\circ g(A')=A\neq A'$ ce qui montre que g n'est pas une réflexion. Donc g est une symétrie glissante.

Pour la forme réduite de g :

L'axe passe par les milieux des segments $[BA]$ et $[A'B]$ car $g(B)=A$ et $g(A')=B$. Alors c'est la droite (AB).

Le vecteur $\vec{u}$ vérifie $2\vec{u}=\overrightarrow{A'A}$ car $g\circ g(A')=A$. Alors $\vec{u}=\overrightarrow{BA}$. D'où la forme réduite de g :

$$g=t_{\overrightarrow{BA}}\circ S_{AB}=S_{AB}\circ t_{\overrightarrow{BA}}$$

c) La rotation r est telle que : $\begin{array}{c} r \\ C\to B \\ J\to K\end{array}$ **. Alors**

Une mesure de l'angle de r est : $\theta=\left(\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{BK}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

Le centre de r est le point A intersection des droites (CJ) et (BK) car les médiatrices des segments $[CB]$ et $[JK]$ sont confondues.

2) **La similitude directe s est telle que :** $\begin{array}{c} s \\ A\to B \\ C\to I\end{array}$

a) Le rapport de s est : $\lambda=\frac{BI}{AC}=\frac{1}{2}$

Une mesure de l'angle de s est $\theta=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BI}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.

b) Soit Ω le centre de s. Pour montrer que $\Omega\in\Gamma$ on a : $s(A)=B\Rightarrow\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

Comme $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}$ **alors** $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\quad[2\pi]$ **ce qui montre que les points Ω, A, B et C sont cocycliques. Alors $\Omega\in\Gamma$.**

Pour montrer que les points Ω, A, I sont alignés on a :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega I}\right)&=\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega I}\right)\quad[2\pi]\\&=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega I}\right)\quad[2\pi]\ \text{car } \Omega,A,B,C \text{ sont cocycliques}\\&=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0\quad[2\pi]\ \text{car } s(C)=I\end{aligned}$$

Donc les points Ω, A et I sont alignés.

c) La somme des angles de s et r est nulle $\left(\frac{\pi}{3}\ \text{et}\ -\frac{\pi}{3}\right)$**. Donc la composée $h=s\circ r$ est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$, (même rapport de s).**

Pour déterminer le centre de h, on a $h(A)=s\circ r(A)=s(A)=B$

et $\overrightarrow{A'B}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$ **ce qui prouve que A' est le centre de h**

Donc h est l'homothétie de centre A' et de rapport $\frac{1}{2}$.

3) Soit M un point de Γ distinct de Ω, on pose $M'=s(M)$ et $M_1=r(M)$

a) Pour montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle :

Méthode 1 : On a

$$s(M)=M'\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=\dfrac{1}{2}\\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]\end{cases}\qquad \text{et}\quad \cos\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\frac{\Omega M'}{\Omega M}$$

Par conséquent le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M'.

Autre méthode :

On peut appliquer la relation d'Alkashi dans le triangle $\Omega MM'$:

$$MM'^2=\Omega M^2+\Omega M'^2-2\Omega M\times\Omega M'\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\Omega M^2+\frac{1}{4}\Omega M^2-2\Omega M\times\frac{1}{2}\Omega M\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\Omega M^2$$

Alors $MM'^2+\Omega M'^2=\dfrac{3}{4}\Omega M^2+\dfrac{1}{4}\Omega M^2=\Omega M^2$

Donc d'après le réciproque du théorème de Pythagore le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M'.

b) Pour montrer que la droite (MM') passe par un point fixe :

On constate que $s(C)=I$ et $s(A)=B$. Alors si la droite (MM') passe par un point fixe , ce point doit appartenir aux droites (CI) et (AB) qui se coupent en B .

Vérifions alors que pour tout point $M\in\Gamma$, (différent de B et Ω) la droite (MM') passe par B :

On a $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MM'}\right)=\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{M\Omega}\right)+\left(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MM'}\right)\quad[2\pi]$

Or $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{M\Omega}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)=\dfrac{\pi}{6}\quad[2\pi]$ **car les points Ω,M,A,B sont cocycliques**

De plus, le triangle $\Omega MM'$ rectangle en M' et $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$ d'où

$$\left(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MM'}\right)=-\frac{\pi}{6}\quad[2\pi]$$

Donc $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MM'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)+\left(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MM'}\right)\quad[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MM'}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=0\quad[2\pi]$$

Donc, pour tout point $M\in\Gamma$, la droite (MM') passe par B.

c- Montrons que les points M_1, M et M' sont alignés

On a $\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MM'}\right)=\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MM'}\right)\quad[\pi]$

$$=\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\quad[\pi]\ \text{car } B\in(MM')$$

$$=\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\quad[\pi]$$

$$=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=0\quad[\pi]$$

Donc les points M_1, M et M' sont alignés .

4.a) On pose $M_0=A$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ M_{n+1}=s(M_n)$

On a $M_1=s(M_0)=s(A)=B$ **alors** $M_1=B$

- $M_2=s(M_1)=s(B)$.

Pour construire M_2 on a :

$$\begin{array}{c} s \\ A \to B \\ B \to M_2 \\ C \to I \end{array}$$

Par conservation de configuration, le triangle BM_2I est équilatéral direct (semblable à ABC). Ce qui permet de construire M_2. On remarque aussi que le triangle ΩBM_2 est rectangle en M_2 . donc M_2 appartient au cercle de diamètre $[\Omega B]$ avec $\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega M_2}\right)=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$.

b) Vérifions que $M_{2017}\in(\Omega B)$

On sait que $M_{2017}=s^{2017}\left(M_0\right)=s^{2017}\left(A\right)=s^{2016}\left(s(A)\right)$

$M_{2017}=s^{2016}\left(B\right)$.

La transformation s^{2016} est une composée de similitudes directes de centre Ω. C'est une similitude directe d'angle $2016\times\frac{\pi}{3}$. C'est-à-dire zéro ($672\pi=0\quad[2\pi]$) .Alors c'est une homothétie de centre Ω qui transforme B en $M_{2017}\in\left(\Omega B\right)$. Ce qui montre que $M_{2017}\in\left(\Omega B\right)$.

c) Pour tout entier naturel n, on a $L_n=M_nM_{n+1}$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}L_k$

Comme le rapport de s est $\frac{1}{2}$ et: $\begin{array}{c} s \\ M_n\to M_{n+1} \\ M_{n+1}\to M_{n+2}\end{array}$

Donc $M_{n+1}M_{n+2}=\frac{1}{2}M_nM_{n+1}$ et $L_{n+1}=\frac{1}{2}L_n$.

Donc $\left(L_n\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $L_0=M_0M_1=AB=4$

Alors $$S_n=L_0+L_1+...+L_n=L_0\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=4\times2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n=8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $\left|\frac{1}{2}\right|<1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$. Alors $\lim_{n\to+\infty}S_n=8$

<u>Exercice 3</u>

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe :

Si un point M d'abscisse x est commun à toutes les courbes alors $f_{n+1}(x)=f_n(x)$ pour tout n.

Donc :
$$\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$$
$$e^{-(n+1)x}=e^{-nx}$$
$$-\left(n+1\right)x=-nx$$

D'où $x = 0$

Or $f_n(0) = \frac{1}{2}$ **donc toutes les courbes** (C_n) **passent par le point de coordonnées** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

2.a) Tableau de variation de f_0 **:**

On a $f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$

$f_0'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	+	
$f_0(x)$	0 ↗	1

b) On considère les points M et N de la courbe (C_0) **d'abscisses respectives** x **et** $-x$**.**
Déterminons les coordonnées de A , milieu de $[MN]$ **,**
Comme $M(x; f_0(x))$ **et** $N(-x; f_0(-x))$ **alors si** $A(x_A; y_A)$ **est le milieu de** $[MN]$ **alors**

$$\begin{cases} x_A = \frac{x+(-x)}{2} = 0 \\ y_A = \frac{f_0(x)+f_0(-x)}{2} = \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{x}}}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alors $A(0; \frac{1}{2})$

Comme $y_A = \frac{f_0(x)+f_0(-x)}{2} = \frac{1}{2}$ **alors** $f_0(x) + f_0(-x) = 2 \times \frac{1}{2}$ **donc A représente le centre de symétrie de** (C_0)

3.a) Pour montrer que les courbes (C_0) **et** (C_1) **sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées**

on remarque que $f_1(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{x}} = f_0(-x)$

D'où si le point $M_1(x; y)$ **appartient à** (C_1) **alors le point** $M_0(-x; y)$ **appartient à** (C_0)

Donc les courbes (C_0) **et** (C_1) **sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées**

b) Le tableau de variation de f_1

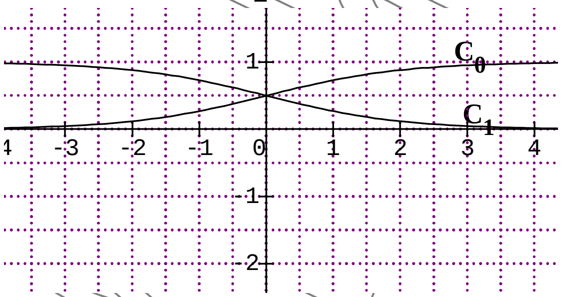
Nous savons que $f_1(x) = f_0(-x)$**. Donc** $f_1'(x) = -f_0'(-x) < 0$

Donc f_1 **est décroissante**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	-	
$f_1(x)$	1 ↘	0

c- Construction de (C_0) et (C_1) dans le même repère

Chacune des courbes (C_0) et (C_1) admet deux asymptotes horizontales d'équations $y=0$ et $y=1$. Elles coupent (Oy) au point d'ordonnée $\frac{1}{2}$



4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.

c- Calcul de limites et interprétation

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = 0 \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-nx} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^{-x}) = 1 \end{cases}$$

Interprétation : la courbe (C_n) admet un asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{nt}}{1+e^{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{(n-1)t}}{e^{-t}+1} \text{ Donc } \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty \quad \text{car} \quad n-1>0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{(n-1)t} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty}(e^{-t}+1) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \times \frac{1}{x} \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{e^{nt}}{1+e^{t}} \times \frac{1}{-t} \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-e^{nt}}{e^{-t}+1} \times \frac{e^{t}}{t} \right) = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-e^{nt}}{e^{-t}+1} \right) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{e^{t}}{t} \right) = +\infty$$

Interprétation graphique:
La courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$

b) Pour n est strictement supérieur à 1,

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \Rightarrow f_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}(1+e^{-x}) + e^{-x} \times e^{-nx}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$\Rightarrow f_n'(x) = \frac{-ne^{-nx} - ne^{-nx} \times e^{-x} + e^{-x} \times e^{-nx}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$\Rightarrow f_n'(x) = \frac{-e^{-nx}\left(n + (n-1)e^{-x}\right)}{(1+e^{-x})^2}$$

$f_n'(x) < 0$ car $n-1>0 \Rightarrow n+(n-1)e^{-x} > 0$ et $-e^{-nx} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **Donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variation de f_n :**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	-
$f_n(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx,\ \ n\in\mathbb{N}$

a) Comme f_n est continue sur $[0,1]$, f_n admet des primitives sur $[0,1]$. Alors (u_n) existe.

$$u_0 = \int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \left[\ln(1+e^x)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

b) Pour vérifier que $u_0 + u_1 = 1$; on a :

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 f_0(x)dx + \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$$

Vérifions que $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x)dx + \int_0^1 f_{n+1}(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}dx \\ &= \int_0^1 e^{-nx}dx \\ &= \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 \\ &= -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$

Déduction de u_1 et u_2

$$u_0 + u_1 = 1 \quad \Rightarrow u_1 = 1 - u_0 \Rightarrow u_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$u_2 + u_1 = \frac{1-e^{-1}}{1} \quad \Rightarrow u_2 = 1 - e^{-1} - u_1 \Rightarrow u_2 = 1 - e^{-1} - 1 + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = -e^{-1} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

c) Pour montrer que (u_n) est convergente :

On sait que $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall x \geq 0$, on a $-(n+1)x \leq -nx \Rightarrow e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx} \Rightarrow 0 < \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \leq \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$

Alors $\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$ d'où $0 < u_{n+1} \leq u_n$

La suite (u_n) est décroissante et minorée (minorée par zéro). Alors elle est convergente.

$$1 + e^{-x} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+e^{-x}} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} < e^{-nx} \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx \leq \int_0^1 e^{-nx}dx$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^{\bullet}\ ;\quad 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx \leq \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^{\bullet},\quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 4

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1.a) Tableau de variation de f.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{1}{x}\right) = 0^+$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0^+$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ car quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

$\forall x\in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times\ln x}{\left(x^2\right)^2}$

$\forall x\in\,]0;+\infty[\,, f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

Or $x^3>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur :

$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\leq\sqrt{e}$

On a $f(\sqrt{e}) = \dfrac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \dfrac{1}{2e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘	0

b) Montrons que pour tout entier $n\geq 6$, l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1,\sqrt{e}\right]$ une seule solution notée a_n :

- **La restriction de f sur l'intervalle $I=\left[1,\sqrt{e}\right]$ est continue et strictement croissante et $f(I)=J=\left[0,\dfrac{1}{2e}\right]$.**
- **De plus $\forall n\geq 6,\ \ 0<\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{2e}$; $\left(\left(\dfrac{1}{6}\simeq 0{,}167<\dfrac{1}{2e}\simeq 0{,}184\right)\right.$. Alors $\forall n\geq 6, \dfrac{1}{n}\in J=\left[0,\dfrac{1}{2e}\right]$.**

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout entier $n\geq 6$, l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1,\sqrt{e}\right]$ une seule solution notée a_n

c- Montrons que la suite (a_n) est décroissante, et qu'elle converge :

On a $\forall n\geq 6,\ \dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$. Or $\forall n\geq 6,\ \dfrac{1}{n}=f(a_n)$ et $\dfrac{1}{n+1}=f(a_{n+1})$ donc $f(a_n)>f(a_{n+1})$ et comme f est strictement croissante sur $\left[1,\sqrt{e}\right]$ alors $a_n>a_{n+1}$ et la suite (a_n) est strictement décroissante.

D'autre part $a_n\in\left[1,\sqrt{e}\right]$ donc la suite (a_n) est décroissante et minorée par 1 , d'où elle converge.

2.a) Montrons que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a : $\dfrac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\int_k^{k+1}\dfrac{\ln x}{x^2}dx\leq\dfrac{\ln k}{k^2}$

Soit k un entier strictement supérieur à 1 alors $k\geq 2$ et :

$x\in\left[k,k+1\right]\Rightarrow k\leq x\leq k+1$ **donc** $f(k+1)\leq f(x)\leq f(k)$ **car f est décroissante sur $\left[2,+\infty\right[$. Alors**

$\dfrac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}<\dfrac{\ln x}{x^2}<\dfrac{\ln k}{k^2}$ **donc** $\int_k^{k+1}\dfrac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}dx<\int_k^{k+1}\dfrac{\ln x}{x^2}dx<\int_k^{k+1}\dfrac{\ln k}{k^2}dx$

Soit $\dfrac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\int_k^{k+1}dx\leq\int_k^{k+1}\dfrac{\ln x}{x^2}dx\leq\dfrac{\ln k}{k^2}\int_k^{k+1}dx$

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\left[x\right]_k^{k+1} \le \int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x^2}dx \le \frac{\ln k}{k^2}\left[x\right]_k^{k+1}$$

Par conséquent $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \le \int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x^2}dx \le \frac{\ln k}{k^2}$

b) Pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx,\quad n\ge 2$**, on utilise une intégration par parties :**

On pose $\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=\frac{1}{x^2}\end{cases}$ **Alors** $\begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=-\frac{1}{x}\end{cases}$

$$\int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_2^n + \int_2^n \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x}\right]_2^n$$

$$= \frac{-\ln n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$$

3) Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on a : $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + ... + \frac{\ln n}{n^2}$ **.**

a) D'après 2.a) on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \le \int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x^2}dx \le \frac{\ln k}{k^2}$

Donc :

$$\begin{cases} \frac{\ln 3}{3^2} \le \int_2^3 \frac{\ln x}{x^2}dx \le \frac{\ln 2}{2^2} \\ \frac{\ln 4}{4^2} \le \int_3^4 \frac{\ln x}{x^2}dx \le \frac{\ln 4}{3^2} \\ . \qquad . \qquad . \\ . \qquad . \qquad . \\ . \qquad . \qquad . \\ \frac{\ln n}{n^2} \le \int_{n-1}^n \frac{\ln x}{x^2}dx \le \frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2} \end{cases}$$

En additionnant membre à membre on obtient :

$\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k^2} \le \int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx \le \sum_{k=2}^{n-1}\frac{\ln k}{k^2}$ **Donc :** $S_n - \frac{\ln(2)}{(2)^2} \le \int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx \le S_n - \frac{\ln(n)}{(n)^2}$ **.**

b) Pour montrer que : $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln n}{n^2} \le S_n \le \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln n}{n}$

on a d'après la question 2.b) : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

De la question précédente on a : $S_n - \frac{\ln 2}{2^2} \le \int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx \le S_n - \frac{\ln n}{n^2}$

- **La première inégalité s'écrit :** $S_n \le \frac{\ln 2}{2^2} + \int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx$

$$\text{Donc } S_n \le \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$$

- **La seconde inégalité :** $S_n \ge \int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx + \frac{\ln n}{n^2}$

$$\text{Donc } S_n \ge \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2}$$

Alors $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} \le S_n \le \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ **, on a :** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ **et** $I_n = \frac{1}{n!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le I_n \le \frac{(\ln 2)^n}{n!}$

$\forall x \in [1;2],\ 1 \le x \le 2 \Rightarrow 0 \le \ln x \le \ln 2 \Rightarrow 0 \le (\ln x)^n \le (\ln 2)^n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

D'autre part $\forall x \in [1;2],\ 1 \le x \le 2 \Rightarrow 1 \le x^2 \le 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{x^2} \le 1$

Par produit $0 \le \frac{(\ln x)^n}{x^2} \le (\ln 2)^n$

Par intégration de 1à 2 : $0 \le \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx \le \int_1^2 (\ln 2)^n dx$

et $0 \le \frac{1}{n!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx \le \frac{1}{n!}(\ln 2)^n \int_1^2 dx$

$$0 \le \frac{1}{n!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx \le \frac{1}{n!}(\ln 2)^n [x]_1^2$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le I_n \le \frac{(\ln 2)^n}{n!}$

Pour la limite de I_n , comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} \le \lim_{n\to+\infty} (\ln 2)^n = 0$ **car** $|\ln 2| < 1$

Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

b) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

On a $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2}dx$

On utilise une intégration par parties :

On pose $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$ **. Alors** $\begin{cases} u'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[-\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}\right]_1^2 + \frac{1}{n!}\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$ **, d'où** $I_{n+1} = -\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!} + I_n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

c) Pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + ... \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$

utilisons la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$ **:**

$$\begin{cases} \cancel{I_2} = I_1 - \frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^2}{(2)!} \\ \cancel{I_3} = \cancel{I_2} - \frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^3}{3!} \\ \cancel{I_4} = \cancel{I_3} - \frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^4}{4!} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ I_n = \cancel{I_{n-1}} - \frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^n}{n!} \end{cases}$$

Par addition et réduction on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = I_1 - \frac{1}{2}\left[\frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$

Or d'après 2.b) on a : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$ **, donc**

$$I_1 = -\int_2^1 \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1+\ln 2}{2} + \frac{1+\ln 1}{1} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 2}{1!}\right)$$

On remplace I_1 **par cette valeur et on obtient :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$

Remarque : on peut établir une démonstration par récurrence.

d) Exprimons (u_n) **en fonction de** I_n **:**

On sait que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ **et**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots \frac{(\ln 2)^n}{n!}\right] = I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\left[\frac{1}{1!} + \frac{(\ln 2)^1}{2!} + \dots \frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!}\right]$$

Donc $I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u_n \ln 2$ **alors** $2I_n = 1 - u_n \ln 2 \Rightarrow u_n \ln 2 = 1 - 2I_n$

Alors : $u_n = \frac{1-2I_n}{\ln 2}$

Pour calculer la limite de (u_n) **on a** $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ **donc** $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\ln 2}$**.**