République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
SERVICE DES EXAMENS

Baccalauréat 2018
Session Complémentaire

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: MATHEMATIQUES
Durée: 4 heures
Coefficients : 9 & 6

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(7+3i)z^2+(12+15i)z-4-18i$.

1.a) Calculer $P(2)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z\in\mathbb{C}:\ P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$ — 0.75 pt

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$. — 0.5 pt

c) On considère les points A, B et D images des solutions de l'équation $P(z)=0$ tels que $\operatorname{Im}(z_A)\le \operatorname{Im}(z_B)\le \operatorname{Im}(z_D)$. Placer les points A, B et D et déterminer la nature du triangle ABD. — 0.75 pt

2° a) Déterminer le barycentre du système $\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$, où C est le symétrique de A par rapport à (BD). — 0.5 pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $9MA^2-6MB^2+2MC^2=-10$. — 0.5 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que $4MA^2-6MB^2+2MC^2=-10$ — 0.5 pt

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan tels que $(9\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=10$. — 0.5 pt

3° Soit $S^0=id$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $S^{n+1}=S\circ S^n$ où S est la similitude directe qui transforme A en B et B en D.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S^{2018} — 0.5 pt

b) Justifier que $S^{2020^{2020}}$ est une homothétie de rapport positif. — 0.5 pt

Exercice 2 (5 points)

I- On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{\frac{-1}{x}};\ \forall x>0 \\ f(0)=0\end{cases}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

1° a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0 — 0.5 pt

b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0,+\infty[$ — 0.5 pt

2° a) Montrer que $\forall t\ge 0$, $0\le e^{-t}+t-1\le \frac{t^2}{2}$ — 0.5 pt

b) En déduire que $\forall x>0$, $\frac{-1}{x}\le f(x)-x\le \frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}$ — 0.25 pt

c) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ dont on donnera l'équation. — 0.25 pt

3° Construire la courbe (C) et la droite Δ. — 0.5 pt

4° a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. — 0.25 pt

b) Construire la courbe (C') de f^{-1}, où f^{-1} est la réciproque de f. — 0.25 pt

II- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction numérique f_n par $\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{x}};\ \forall x>0 \\ f_n(0)=0\end{cases}$.

1° a) Montrer que f_n est continue et dérivable à droite de 0 — 0.5 pt

b) Etudier les variations de f_n et en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n sur $]0,+\infty[$. — 0.5 pt

2° a) Soit $g_n(x)=f_n(x)-\frac{1}{n}$. Etudier sur $]0,+\infty[$ le signe de de $g_{n+1}(x)-g_n(x)$ et en déduire que la suite (α_n) est strictement décroissante et qu'elle est convergente. — 0.5 pt

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)$. En déduire la limite de α_n. — 0.5 pt

Exercice 3 (5 points)

Soit ABCD est un carré direct de centre O et de côté $a > 0$. On note G le milieu du segment $[AB]$ et E et F les points tels que le quadrilatère AEFG soit un carré direct.

1°.a) Faire une figure illustrant les données qu'on complétera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale.	0.5 pt
b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme O en A et B en O.	0,25 pt
c) Déterminer les éléments caractéristiques de r.	0,25 pt
d) Soit g l'antidéplacement défini par $g(B) = E$ et $g(O) = G$. Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.	0.5 pt
2°.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme C en F et B en E, déterminer le rapport et un angle de s.	0.5 pt
b) Déterminer l'image du carré ABCD par s puis en déduire le centre de s	0.5 pt
3° Soit $h = s \circ r^{-1}$	
a) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le rapport	0,25 pt
b) Soit I le centre de h. Montrer que I est le barycentre du système $\{(O,1);(E,2)\}$. Placer I	0,25 pt
c) Pour tout point M du plan, autre que I, on pose $M' = r(M)$ et $M'' = s(M)$. Montrer que la droite $(M'M'')$ passe par un point fixe que l'on précisera	0,25 pt
4° Soit Γ l'hyperbole, de foyers O et F, qui passe par le point J projeté orthogonal de I sur (OF).	
a) Déterminer les cordonnées des points O, E, I et J dans le repère $(G, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GO})$.	0.5 pt
b) Ecrire l'équation de Γ dans ce repère.	0.5 pt
c) Déterminer les sommets, les asymptotes et l'excentricité de Γ.	0.5 pt
d) Construire Γ.	0.25 pt

Exercice 4 (5 points)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 2\ln(1 + e^x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A :

1° a) Donner le tableau de variation de f	1 pt
b) Démontrer que la courbe (C) admet deux asymptotes D et D' que l'on déterminera et préciser leurs positions relatives par rapport à (C).	0.5 pt
c) Construire la courbe (C) et leurs asymptotes dans le même repère.	0.25 pt
2° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.	
a) Montrer que g est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera.	0.25 pt
b) Construire, dans le repère précédent, la courbe (C') de g^{-1}	0.25 pt

Partie B :

On considère la suite numérique (u_n) par $u_0 = \ln 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \int_0^{\ln 5} (f'(t))^n \, dt$	
1° Calculer u_1	0.25 pt
2° a) Montrer que $\forall x \in [0, \ln 5]$ $0 \le f'(x) \le \frac{2}{3}$	0.25 pt
b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \le u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \ln 5$	0.25 pt
c) Déterminer la limite de (u_n)	0.25 pt
3° a) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[$ $(f'(x))^2 - 1 = -2f''(x)$	0.25 pt
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} - u_n = \frac{-2}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$	0.25 pt
c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{2n} = \ln 5 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}$ et $u_{2n+1} = \ln\left(\frac{9}{5}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$	0.5 pt
4° $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p}\left(\frac{2}{3}\right)^p$. Montrer que $v_n = \ln 3 - \frac{u_{2n} + u_{2n+1}}{2}$ puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.	0.5 pt

- *Fin* -

Corrigé

Exercice 1

1°a) $P(2)=2^3-(7+3i)2^2+(12+15i)2-4-18i=8-28-12i+24+30i-4-18i=0$ **. Donc 2 est une racine carrée de P.**

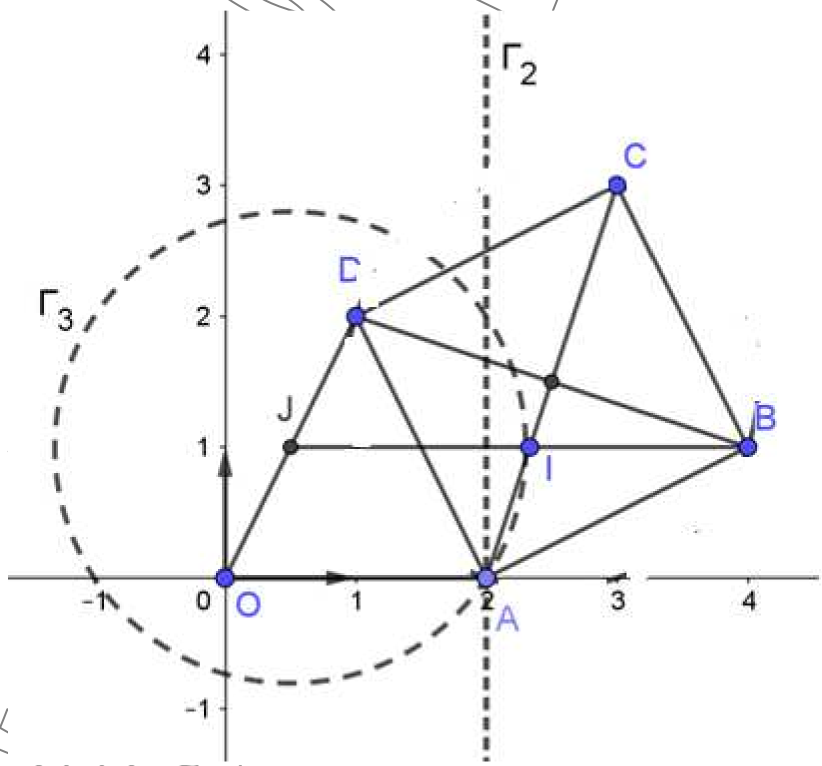
Le tableau de Horner nous permet d'écrire P(z) sous la forme $P(z)=(z-2)(z^2-(5+3i)z+2+9i)$ **.**

b) $P(z)=0 \Leftrightarrow z=2$ **ou** $z^2-(5+3i)z+2+9i=0$ **. Pour cette dernière équation on a**

$\Delta=(5+3i)^2-4(2+9i)=8-6i=(3-i)^2$ **, donc ses solutions sont** $z_1=\dfrac{(5+3i)+(3-i)}{2}=4+i$ **et**

$z_2=\dfrac{(5+3i)-(3-i)}{2}=1+2i$ **. D'où les solutions de l'équation** $P(z)=0$ **sont** $z_0=2;\ z_1=4+i$ **et** $z_2=1+2i$ **.**

c) Comme $\mathrm{Im}(z_0)\le \mathrm{Im}(z_1)\le \mathrm{Im}(z_2)$ **alors** $z_A=2;\ z_B=4+i$ **et** $z_D=1+2i$ **.**



On a $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{1+2i-2}{4+i-2}=\dfrac{-1+2i}{2+i}=\dfrac{i(i+2)}{2+i}=i$ **, d'où le triangle ABD est rectangle isocèle et direct en A.**

2° a) Le point C est donc un sommet du carré ABCD alors son affixe est $z_C=-z_A+z_B+z_D=3+3i$ **, donc l'affixe du barycentre du système** $\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$ **est** $\dfrac{9z_A-6z_B+2z_C}{9-6+2}=\dfrac{18-24-6i+6+6i}{5}=0$ **. D'où O est le barycentre du système** $\{(A;9),(B;-6),(C;2)\}$ **.**

b) Soit $\varphi(M)=9MA^2-6MB^2+2MC^2$ **. Pour tout point M du plan, on a**
$\varphi(M)=5MO^2+9OA^2-6OB^2+2OC^2$ **donc** $\varphi(M)=5MO^2+36-102+36=5MO^2-30$ **. Alors**
$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow \varphi(M)=-10 \Leftrightarrow 5MO^2=20 \Leftrightarrow MO^2=4$ **.**
Donc Γ_1 **est le cercle de centre O et de rayon 2, il passe par A.**

c) Soit $\psi(M)=4MA^2-6MB^2+2MC^2$ **. On remarque que** $\psi(A)=4AA^2-6AB^2+2AC^2=-10$ **, donc** $A\in\Gamma_2$
Pour tout point M du plan, on a $\psi(M)=2\overrightarrow{MA}.\vec{u}+\psi(A)=2\overrightarrow{MA}.\vec{u}-10$ **avec** $\vec{u}=4\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{IB}$ **où I est le barycentre du système** $\{(A;2),(C;1)\}$ **, donc** $z_I=\dfrac{2z_A+z_C}{3}=\dfrac{7}{3}+i$ **. Alors** $\psi(M)=12\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IB}-10$
$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow \psi(M)=-10 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IB}=0$ **. Donc** Γ_2 **est la droite perpendiculaire à** (IB) **passant par A.**

d) Soit $\sigma(M)=\left(9\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=5\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MD}$

Soit J le milieu de $[OD]$, L'affixe de J est donc $z_J=\frac{1}{2}z_D=\frac{1}{2}+i$ alors $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MD}=MJ^2-\frac{1}{4}OD^2=MJ^2-\frac{5}{4}$.

Pour tout point M du plan on a donc $\sigma(M)=5MJ^2-\frac{25}{4}$ et alors $M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow 5MJ^2-\frac{25}{4}=10 \Leftrightarrow MJ^2=\frac{13}{4}$

Alors Γ_3 est le cercle de centre J et de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{13}$. Or $AJ^2=\frac{13}{4}$ donc le cercle Γ_3 passe par A.

3°a) L'écriture complexe de S est de la forme $z'=az+b$ avec

$\begin{cases}S(A)=B\\S(B)=D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z_B=az_A+b\\z_D=az_B+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4+i=2a+b\\1+2i=a(4+i)+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1+i\\b=6-i\end{cases}$. Donc l'écriture complexe de S est

$z'=(-1+i)z+6-i$. Donc le rapport de S est $|-1+i|=\sqrt{2}$, son angle est une mesure de $\arg(-1+i)=\frac{3\pi}{4}$ et

son centre est le point Ω d'affixe $\omega=\frac{6-i}{1-(-1+i)}=\frac{13}{5}+\frac{4}{5}i$

b) $S=s\left(\Omega;\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ donc $S^{2018}=s\left(\Omega;\left(\sqrt{2}\right)^{2018};\frac{3\pi}{4}\times 2018\right) \Rightarrow S^{2018}=s\left(\Omega;2^{1009};-\frac{\pi}{2}\right)$

c) On a $S^4=s\left(\Omega;\left(\sqrt{2}\right)^4;\frac{3\pi}{4}\times 4\right) \Rightarrow S^4=s(\Omega;4;\pi)$ c'est donc l'homothétie h de centre Ω et de rapport -4 et on a $S^8=h^2$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 16. En plus on a $2020\equiv 4[8]$ ce qui montre que $2020^{2020}\equiv 4^{2020}[8]$. Or $4^{2020}=2^{4040}=2^{3\times 1346+2}=2^{4037}\times 2^3=2^{4037}\times 8$, un multiple de 8, donc $4^{2020}\equiv 0[8]$. Ce qui montre l'existence d'un entier k tel que $2020^{2020}=8k$ et par conséquent que $S^{2020^{2020}}=S^{8k}$ qui est l'homothétie de centre Ω et de rapport $(-4)^{8k}=4^{8k}$. D'où $S^{2020^{2020}}$ est une homothétie de rapport positif.

Exercice 2

I- 1° a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)e^{\frac{-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}=1\times 0=0=f(0)$, d'où f est continue à droite de 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(e^{-t}+\frac{t}{e^t}\right)=0+0=0=f(0)$, donc f est dérivable à droite de 0 et sa courbe admet une tangente horizontale à l'origine.

b) f étant le produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, elle est alors dérivable sur cet intervalle et

$\forall x>0$ on a $f'(x)=e^{\frac{-1}{x}}+(x+1)\times\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{-1}{x}}$ donc $f'(x)>0$ sur $]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{\frac{-1}{x}}=+\infty\times 1=+\infty$

Tableau de variation de f :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\quad$ $+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

2° a) Pour tout $x\geq 0$ on a $0\leq e^{-x}\leq 1$ ce qui entraine que $\forall u\geq 0$ on a $0\leq\int_0^u e^{-x}dx\leq\int_0^u 1dx \Rightarrow 0\leq 1-e^{-u}\leq u$.

D'où $\forall t\geq 0$, on a $0\leq\int_0^t\left(1-e^{-u}\right)du\leq\int_0^t udu \Rightarrow 0\leq\left[u+e^{-u}\right]_0^t\leq\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^t \Rightarrow 0\leq t+e^{-t}-1\leq\frac{1}{2}t^2$.

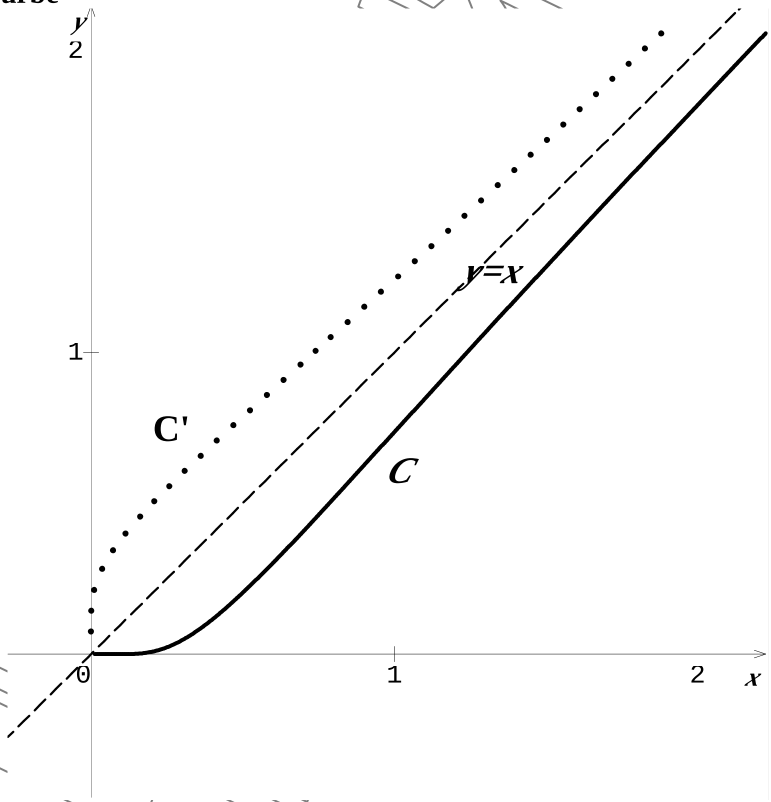
b) $\forall x>0$, on a $\frac{1}{x}>0$, d'où d'après a) on a $0\leq\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}-1\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$ et en multipliant par $x+1$ qui est positif

on trouve : $0\leq(x+1)\left(\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}-1\right)\leq\frac{x+1}{2x^2} \Rightarrow 0\leq\frac{1}{x}-x+(x+1)e^{-\frac{1}{x}}\leq\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}$ ce qui donne

$0\leq\frac{1}{x}-x+f(x)\leq\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}$ et par la suite $\frac{-1}{x}\leq f(x)-x\leq\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}$.

c) En utilisant la double inégalité précédente, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}\right)=0$ alors d'après le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$. D'où la droite Δ d'équation $y=x$ est une asymptote oblique pour la courbe (C) de f.

3° Construction de la courbe



4° a) Sur l'intervalle $[0,+\infty[$, f étant continue et strictement croissante elle réalise alors une bijection de cet intervalle sur son image $J=[0,+\infty[$.

b) Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

La courbe cf la figure ci-dessus.

II- 1° a) $\lim\limits_{x\to0^+}f_n(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{x}}=0=f(0)$ donc f est continue à droite de 0.

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{nx}\right)e^{\frac{-1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-t}+\frac{1}{n}\cdot\frac{t}{e^t}\right)=0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, f_n est dérivable à droite de 0.

b) f_n étant le produit de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ alors elle est dérivable sur cet intervalle et $\forall x\in]0,+\infty[$ on a : $f_n'(x)=e^{\frac{-1}{x}}+\left(x+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{nx^2}\right)e^{\frac{-1}{x}}$. Alors $\forall x\in]0,+\infty[$; $f_n'(x)\geq0$ puisque tous ses facteurs sont positifs. Tableau de variation de f_n :

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f'n$	0 $\quad$ $+$
fn	0 $\nearrow$ $+\infty$

Comme f_n est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image qui est aussi $]0,+\infty[$. Puisque $\frac{1}{n}>0$ alors l'équation $f_n(x)=\frac{1}{n}$ admet une unique solution α_n sur $]0,+\infty[$.

2° a) $\forall x>0$; $g_{n+1}(x)-g_n(x)=\left[\left(x+\frac{1}{n+1}\right)e^{\frac{-1}{x}}-\frac{1}{n+1}\right]-\left[\left(x+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{x}}-\frac{1}{n}\right]=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{x}}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$

Donc $g_{n+1}(x)-g_n(x)=\dfrac{1-e^{\frac{-1}{x}}}{n(n+1)}\geq 0$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$ **et** $\forall x>0$; $g_n(x)\leq g_{n+1}(x)$. **Alors** $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

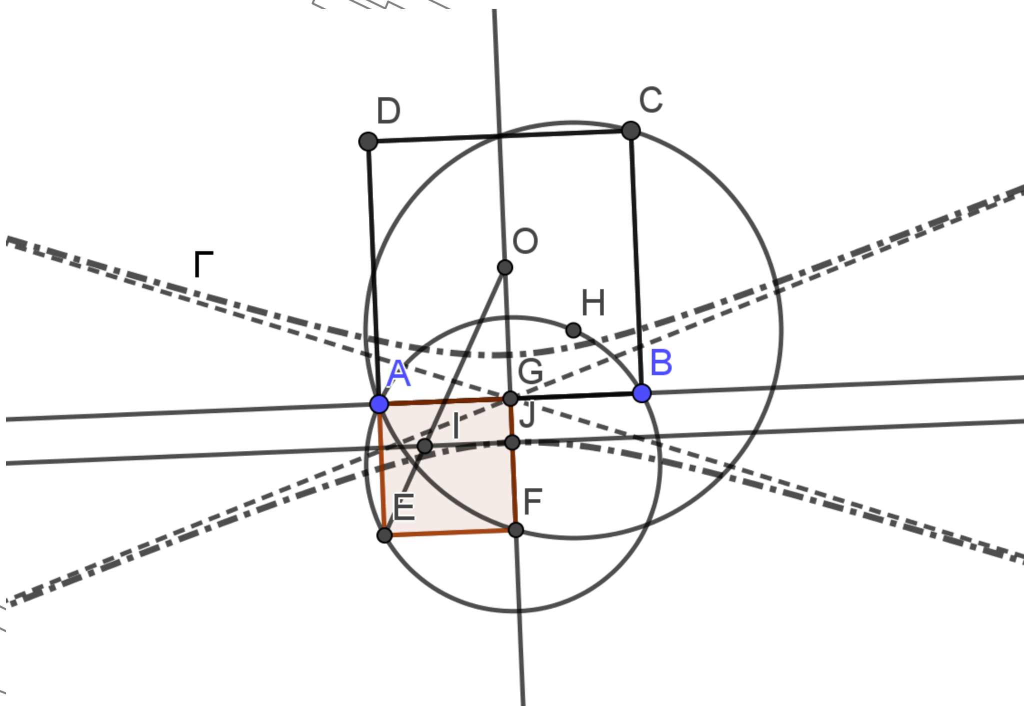
$g_n(\alpha_{n+1})\leq g_{n+1}(\alpha_{n+1})=\dfrac{1}{n+1}\leq\dfrac{1}{n}=g_n(\alpha_n)$, **d'où** $g_n(\alpha_{n+1})\leq g_n(\alpha_n)$ **et comme** $g_n'(x)=f_n'(x)\geq 0$; **donc** g_n **est croissante et par conséquent** $g_n(\alpha_{n+1})\leq g_n(\alpha_n)\Rightarrow \alpha_{n+1}\leq\alpha_n$. **Donc la suite** (α_n) **est strictement décroissante et puisqu'elle est minorée (minorée par 0) alors elle est convergente, soit** δ **sa limite alors** $0\leq\delta\leq\alpha_1$

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(\alpha_n)=\dfrac{1}{n}\Leftrightarrow\left(\alpha_n+\dfrac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{\alpha_n}}=\dfrac{1}{n}\Leftrightarrow n\alpha_n+1=e^{\frac{1}{\alpha_n}}\Leftrightarrow n\alpha_n=e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1$. **Supposons que** $\delta\neq 0$, **donc**

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n=\delta\times(+\infty)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)=e^{\frac{1}{\delta}}-1$, **donc** $e^{\frac{1}{\delta}}-1=+\infty$ **ce qui est contradictoire . D'où** $\delta=0$, **donc** $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.

Exercice 3

1° a) La figure



b) O , A et B étant trois points distincts tels que $OB=AO$ **et** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}$ **alors il existe une unique rotation r qui transforme O en A et B en O.**

c) Son angle est de mesure $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AO})=(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})+\pi=\dfrac{\pi}{2}$, **son centre est le point d'intersection des médiatrices de** $[OA]$ **et** $[OB]$ **qui est G. Alors r est le quart de tour direct de centre G.**

d) $\begin{cases}\text{med}[BE]\perp(BE)\\ \text{med}[OG]\perp(OG)\end{cases}$ **donc si** $\text{med}[BE]=\text{med}[OG]$ **alors** $(BE)\parallel(OG)$ **ce qui est contradictoire donc** $\text{med}[BE]\neq\text{med}[OG]$ **d'où g n'est pas une réflexion alors c'est une symétrie glissante. Le milieu de** $[BE]$ **est un point de la droite** (OG) **(théorème des milieux) donc la droite** (OG) **passe par les milieux des deux segments** $[BE]$ **et** $[OG]$ **alors est** (OG) **l'axe de g. Comme O est un point de l'axe de g et** $g(O)=G$ **alors** $\overrightarrow{OG}$ **est le vecteur de g.**

D'où g est la symétrie glissante d'axe (OG) **et de vecteur** $\overrightarrow{OG}$, **sa forme réduite est** $g=t_{\overrightarrow{OG}}\circ S_{OG}=S_{OG}\circ t_{\overrightarrow{OG}}$.

2° a) Comme $CB = a > 0$ alors $C \neq B$, de même $EF = AG = \frac{1}{2}a \neq 0$ donc $E \neq F$, ce qui prouve qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme C en F et B en E. Le rapport de s est $\frac{FE}{CB} = \frac{1}{2}$, une mesure de son angle est $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{FE}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

b) Soit $A' = s(A)$ et $D' = s(D)$, comme BCDA est un carré direct alors son image $EFD'A'$ est un carré direct, construit sur le segment $[EF]$, or sur ce segment on ne peut construire qu'un seul carré direct et puisque EFGA est un carré direct alors on en déduit que $D' = G$ et $A' = A$, d'où A est le centre de s.

3° L'angle de r^{-1} est $-\frac{\pi}{2}$, donc l'angle de h est $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi[2\pi]$ alors h est une similitude directe d'angle π donc c'est une homothétie de rapport négatif, son rapport est donc l'opposé de celui de s, alors le rapport de h est $-\frac{1}{2}$.

b) $h(O) = s \circ r^{-1}(O) = s(B) = E$, d'où $\overrightarrow{IE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IO} \Rightarrow 2\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IO} = \vec{0}$, donc I est le barycentre du système $\{(O,1);(E,2)\}$.

c) $h(M') = s \circ r^{-1}(M') = s(M) = M''$, d'où la droite $(M'M'')$ passe par le point I.

4° a) Dans le repère $(G, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GO})$, on a $O(0;1)$ et $E(-1;-1)$ donc $x_I = \frac{x_O + 2x_E}{3} = -\frac{2}{3}$ et $y_I = \frac{y_O + 2y_E}{3} = -\frac{1}{3}$

J étant le projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées alors $x_J = 0$ et $y_J = -\frac{1}{3}$ d'où $I\left(\frac{-2}{3}; \frac{-1}{3}\right)$ et $J\left(0; \frac{-1}{3}\right)$.

b) Le centre de Γ est G, son axe focal est (OF) (axe des ordonnées) et comme $J \in (OF)$ alors J est un sommet de Γ d'où $b = GJ = \frac{1}{3}$ et $c = GO = 1$ et par conséquent $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Alors l'équation de Γ est $\frac{x^2}{\frac{8}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = -1$.

c) Les sommets de Γ sont J et son symétrique par rapport à G qui est de cordonnées $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Ses asymptotes ont pour équations $y = \frac{x\sqrt{2}}{4}$ et $y = \frac{-x\sqrt{2}}{4}$. Son excentricité est égale à $\frac{c}{b} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 3$.

c) La construction cf la figure précédente.

Exercice 4

Partie A

1° a) On remarque que $f(x) = -x + 2\ln(1 + e^x) = -x + 2\ln\left[e^x(e^{-x} + 1)\right] = x + 2\ln(e^{-x} + 1)$, elle est alors paire.
Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[-x + 2\ln(1 + e^x)\right] = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[x + 2\ln(e^{-x} + 1)\right] = +\infty$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}$, car somme de fonctions dérivables, et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a
$f'(x) = -1 + 2\frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ qui s'annule en 0 et son signe est négatif avant 0, positif après.
Tableau de variation de f :

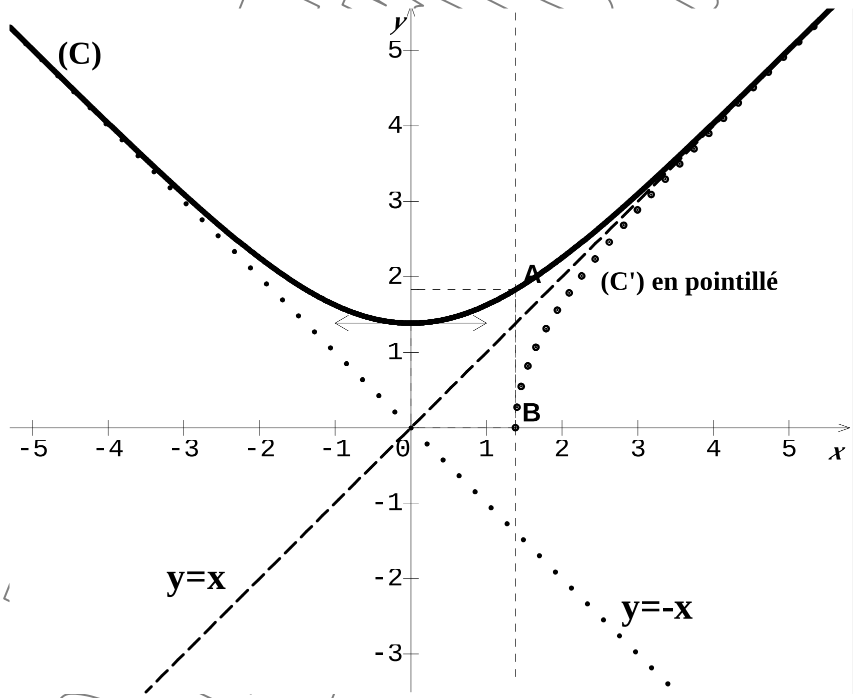
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

b) L'écriture initiale de f nous donne que $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[2\ln(1+e^x)]=0$, d'où la droite D' d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$, en plus $1+e^x>0\Rightarrow 2\ln(1+e^x)>0$, alors (C) est au-dessus de D'.

L'autre écriture initiale de f sous la forme $f(x)=x+2\ln(e^{-x}+1)$ donne que

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}[2\ln(e^{-x}+1)]=0$, d'où la droite D d'équation $y=x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$, en plus $1+e^{-x}>0\Rightarrow 2\ln(1+e^{-x})>0$, alors (C) est au-dessus de. D .

La courbe (C) est donc asymptote aux deux bissectrices et elle est au-dessus des deux.



2° a) g est continue et strictement croissante sur I alors c'est une bijection de I sur son intervalle image qui est $J=[2\ln 2;+\infty[$.

b) La courbe (C') de g^{-1} se déduit de (C) par la réflexion d'axe la droite D. Voire la figure.

Partie B :

1° $u_1=\int_0^{\ln 5}f'(t)dt=[f(t)]_0^{\ln 5}=f(\ln 5)-f(0)=-\ln 5+2\ln 6-2\ln 2=2\ln 3-\ln 5$ donc $\boxed{u_1=\ln\left(\frac{9}{5}\right)}$

2° a) $f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}\Rightarrow f''(x)=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$ alors f' est strictement croissante d'où $\forall x\in[0,\ln 5]$ on a $f'(0)\le f'(x)\le f'(\ln 5)$ or $f'(0)=0$ et $f'(\ln 5)=\frac{2}{3}$ d'où $\forall x\in[0,\ln 5]$; $0\le f'(x)\le\frac{2}{3}$.

b) On a $\forall t\in[0,\ln 5]$ $0\le f'(t)\le\frac{2}{3}$ ce qui entraine que $0\le(f'(t))^n\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et par conséquent on a :

$$0\le\int_0^{\ln 5}(f'(t))^n dt\le\int_0^{\ln 5}\left(\frac{2}{3}\right)^n dt\Rightarrow 0\le u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\ln 5$$

c) Comme $0\le u_n\le\left(\frac{2}{3}\right)^n\ln 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\ln 5=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ (Théorème des gendarmes).

3° a) $\forall x\in[0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{-x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}}}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{-x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{-x}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}}\right)^2}$

$\Rightarrow f''(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{-x}{2}}\right)^2}{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{-x}{2}}\right)^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(f'(x)\right)^2$ d'où $\left(f'(x)\right)^2-1=-2f''(x)$

b) On a $\left(f'(x)\right)^2-1=-2f''(x)$, si on multiplie les deux membres par $\left(f'(x)\right)^n$, on trouve $\left(f'(x)\right)^{n+2}-\left(f'(x)\right)^n=-2f''(x)\left(f'(x)\right)^n$, en intégrant on trouve :

$\int_0^{\ln 5}\left(f'(x)\right)^{n+2}dx-\int_0^{\ln 5}\left(f'(x)\right)^n dx=-\int_0^{\ln 5}2f''(x)\left(f'(x)\right)^n dx=-2\int_0^{\ln 5}f''(x)\left(f'(x)\right)^n dx\Rightarrow$

$u_{n+2}-u_n=-2\left[\dfrac{1}{n+1}\left(f'(x)\right)^{n+1}\right]_0^{\ln 5}=\dfrac{-2}{n+1}\left(\left(f'(\ln 5)\right)^{n+1}-\left(f'(0)\right)^{n+1}\right)=\dfrac{-2}{n+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$. D'où $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_{n+2}-u_n=\dfrac{-2}{n+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

c) ⇨ Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_{2n}=\ln 5-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{2k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k-1}$

On sait que $u_1=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)$ et que $u_2-u_0=-2\left(\dfrac{2}{3}\right)\Rightarrow u_{2\times1}=\ln 5-\dfrac{2}{2\times1-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\times1-1}=\ln 5-\sum_{k=1}^{1}\dfrac{2}{2k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k-1}$ donc la proposition est vraie pour $n=1$. Supposons qu'elle est vraie pour n c'est-à-dire que $u_{2n}=\ln 5-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{2k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k-1}$ et montrons qu'elle serait vraie pour n+1 c'est-à-dire que $u_{2n+2}=\ln 5-\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{2}{2k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k-1}$. Or

$u_{2n+2}=u_{2n}-\dfrac{2}{2n+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n+1}=\left(\ln 5-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{2k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k-1}\right)-\dfrac{2}{2(n+1)-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2(n+1)-1}=\ln 5-\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{2}{2k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k-1}$

Ce qui achève la démonstration et montre que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_{2n}=\ln 5-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{2k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k-1}$

⇨ Montrons de même par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_{2n+1}=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k}$

On sait que $u_0=\ln 5$ et que $u_3-u_1=-\dfrac{2}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\Rightarrow u_{2\times1+1}=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)-\dfrac{1}{1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\times1}=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)-\sum_{k=1}^{1}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k}$ donc la proposition est vraie pour $n=1$. Supposons qu'elle est vraie pour n c'est-à-dire que $u_{2n+1}=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k}$ et montrons qu'elle serait vraie pour n+1 c'est-à-dire que $u_{2(n+1)+2}=\ln 5-\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k}$. Or $u_{2(n+1)+2}=u_{2n+3}=u_{(2n+1)+2}=u_{2n+1}-\dfrac{2}{2n+2}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ donc

$u_{2(n+1)+2}=u_{2n+1}-\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2(n+1)}=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k}-\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2(n+1)}=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)-\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k}$.

Ce qui achève la démonstration et montre que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_{2n+1}=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k}$

⇨ Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_{2n}=\ln 5-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{2k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k-1}\quad\text{et}\quad u_{2n+1}=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k}}$

4° $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a $u_{2n}=\ln 5-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{2k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k+1}$ et $u_{2n+1}=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k}=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{2k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2k}$ d'où

$$u_{2n}+u_{2n+1}=\ln 5-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}+\ln\left(\frac{9}{5}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$$

$$\Rightarrow u_{2n}+u_{2n+1}=\ln 5+\ln\left(\frac{9}{5}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\right)$$

$\Rightarrow u_{2n}+u_{2n+1}=\ln 5+\ln\left(\frac{9}{5}\right)-2\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}\left(\frac{2}{3}\right)^{p}=\ln 9-2v_n \Rightarrow u_{2n}+u_{2n+1}=2\ln 3-2v_n$, d'où $v_n=\ln 3-\frac{u_{2n}+u_{2n+1}}{2}$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln 3-\frac{u_{2n}+u_{2n+1}}{2}\right)=\ln 3$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ln 3$.