Correction de l'exercice 2 du Bac blanc – 21-12-2016
(Méthodes et astuces)

Exercice 1

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a_n = n^3 - n^2 - 12n$ et $b_n = 2n^2 - 7n - 4$.

1) Montrer, après factorisation, que a_n et b_n sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

2) On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$. On note d le PGCD de α et β.

a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n.

b) Démontrer que d est un diviseur de 5.

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est un multiple de 5

3) Montrer que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.

4-a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a_n et b_n.

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 7$.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $1078x + 161y = 35$.

Solution

1) Par factorisation

$$a_n = n\left(n^2 - n - 12\right) = n(n-4)(n+3)$$

$$b_n = (n-4)(2n+1)$$

n est un entier naturel supérieur ou égal à 5. Alors $n(n-4)(n+3) > 0$ et $(n-4)(2n+1) > 0$.

Donc a_n et b_n sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.

2.a) On a $\beta = n+3 \Rightarrow n = \beta - 3$.

D'autre part $\alpha = 2n+1 \Rightarrow \alpha = 2(\beta-3)+1 = 2\beta - 5$.

Enfin $-\alpha + 2\beta = 5$

On peut tout simplement éliminer n entre α et β : $\alpha - 2\beta = 2n+1-2(n+3) = -5$.

b) Le nombre d est le PGCD de α et β. Alors d divise α et d divise β et divise toute combinaison linéaire de α et β. Donc d divise $-\alpha+2\beta$; d'où d divise 5. ceci signifie que d=1 ou 5 car un pgcd est toujours positif.

c) <u>1ère méthode : divisibilité(1)</u>

On sait que si a divise 2 nombres, il divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres.

$5 \mid (n-2) \Rightarrow 5 \mid (n-2+5) \Rightarrow 5 \mid (n+3) \Rightarrow 5 \mid \beta$,

$5 \mid (n-2)$ *et* $5 \mid \beta \Rightarrow 5 \mid (n-2+\beta) \Rightarrow 5 \mid (n-2+n+3) \Rightarrow 5 \mid (2n+1) \Rightarrow 5 \mid \alpha$.

Réciproquement: $5 \mid \alpha$ **et** $5 \mid \beta$ **donc** $5 \mid (\alpha - \beta) \Rightarrow 5 \mid (2n+1-n-3) \Rightarrow 5 \mid (n-2)$.

<u>2ème méthode : congruence</u>

Si les nombres α et β sont multiples de 5, alors $\alpha \equiv 0[5]$ et $\beta \equiv 0[5]$.

Or $\alpha = 2n+1$ donc $2n+1 \equiv 0[5]$ et $2(n-2) = 2n-4 = -5 \equiv 0[5]$, or 2 et 5 sont premiers, d'après le théorème de Gauss, $n-2 \equiv 0[5]$; n-2 est bien un multiple de 5.

De même $\beta = n+3$ donc $n+3 \equiv 0[5]$ et $n-2 = -5 \equiv 0[5]$.

Réciproquement, si $n-2 \equiv 0[5]$, $n+3 = 5 \equiv 0[5]$ donc $\beta = n+3 \equiv 0[5]$, $2n \equiv 4[5]$ et $2n+1 = 5 \equiv 0[5]$ donc $\alpha \equiv 0[5]$

<u>3ème méthode</u> : relation entre α, β et n-2 :

On a $\alpha-\beta=2n+1-n-3=n-2$. Il est donc clair que si α et β sont des multiples de 5, alors $\alpha-\beta$ est aussi un multiple de 5 et par suite n-2.

Réciproquement si n-2 est un multiple de 5, $\alpha-\beta$ aussi. Or $\beta=n+3=5(k+1)$ l'est aussi, donc α aussi.

*

<u>4ème méthode : divisibilité</u>(2)

Si les nombres α et β sont multiples de 5, alors il existent k et k' de $\mathbb{Z}$ tels que $\alpha=5k$ et $\beta=5k'$.

On a $\alpha=2n+1\Rightarrow 2n=\alpha-1$

$\alpha=2n+1\Rightarrow 2n=\alpha-1\Rightarrow 2n-4=5k-5\Rightarrow 2(n-2)=5(k-1)$

Donc 5 divise 2(n-2), mais 2 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 5 divise (n-2), donc n-2 est un multiple de 5.

On a aussi $\beta=n+3\Rightarrow n-2=\beta-5\Rightarrow n-2=5k'-5=5(k'-1)$, donc n-2 est un multiple de 5.

<u>Réciproquement :</u>

Si n-2 est un multiple de 5, il existe un entier k tel que $n-2=5k$ soit $n=5k+2$, or, $\beta=n+3$, donc $\beta=5k+2+3=5k+5=5(k+1)$ et β est un multiple de 5.

De même $\alpha=2n+1$, donc $\alpha=2(5k+2)+1=5\times 2k+5=5\times(2k+1)$ et α est un multiple de 5.

3) <u>1ère méthode : algorithme d'Euclide</u>

On divise 2n+1 par n : $2n+1=2\times n+1$, puis $n=1\times n+0$, le dernier reste non nul est 1. C'est le PGCD des 2 nombres qui sont donc premiers entre eux.

<u>2ème méthode : Théorème de Bézout</u>

On sait que s'il existe deux relatifs a et b tels que au + bv =1, alors u et v sont premiers entre eux.

Si u = 2n+1 et v = n , alors u – 2v = (2n+1)-2n=1. Il existe 2 relatifs (a,b) = (1,-2) tels que au+bv=1, d'après le théorème de Bézout , les nombres 2n + 1 et n sont premiers entre eux.

4) On a :

$$\mathrm{PGCD}(a_n,b_n)=\mathrm{PGCD}(n(n-4)(n+3),(n-4)(2n+1))$$

$$\mathrm{PGCD}(a_n,b_n)=(n-4)\mathrm{PGCD}(n(n+3),2n+1)$$

$$\mathrm{PGCD}(a_n,b_n)=(n-4)\mathrm{PGCD}(n\beta,\alpha)$$

Or n et $\alpha=2n+1$ sont premiers entre eux. Nous allons montrer que $PGCD(n\beta,\alpha)=PGCD(\beta,\alpha)$

Soit $D_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des diviseurs de α et β et $D_{\alpha,n\beta}$ l'ensemble des diviseurs de α et $n\beta$. Montrons que ces deux ensembles sont égaux.

Si $d\in D_{\alpha,\beta}$, $d\mid\alpha$ et $d\mid\beta$, donc $d\mid n\beta$ et $d\in D_{n\alpha,\beta}$. On vient de montrer que $D_{\alpha,\beta}\subset D_{\alpha,n\beta}$.

Montrons l'inclusion réciproque ; Soit $d\in D_{\alpha,n\beta}$, on suppose que $d>1$(si d=1, d appartient de manière triviale à $D_{\alpha,\beta}$). $d\mid\alpha$ et $d\mid n\beta$, donc $d\mid n\alpha$ et par suite $d\mid n(\alpha-\beta)$.

Soit m le pgcd de n et d ; m divise d et n, mais d divise α , donc m divise α et n , or n et α sont premiers entre eux, donc m =1. d'après le théorème de Gauss, $d\mid(\alpha-\beta)$, mais d divise α ; d divise toute combinaison linéaire, donc aussi β. Par suite $d\in D_{\alpha,\beta}$ et $D_{\alpha,n\beta}\subset D_{\alpha,\beta}$.

<u>Conclusion</u> : Les deux ensembles sont égaux et par suite les PGCD de ces deux ensembles sont égaux.

On a donc maintenant $PGCD(a_n,b_n)=(n-4)PGCD(\beta,\alpha)$; d'après 2b, $PGCD(\beta,\alpha)$ vaut 1 ou 5.

D'après 1.C, ce pgcd vaut 5 si et seulement si (n-2) est un multiple de 5 soit n-2 = 5k. Donc si n=5k+2, $PGCD(a_n,b_n)=5(n-4)$ et sinon, $PGCD(a_n,b_n)=(n-4)$.

b) On a $a_n = n(n-4)(n+3)$ **et** $b_n = (n-4)(2n+1)$.

<u>Cas de n = 11 nombre qui n'est pas de type 5k +2 :</u>

$a_{11} = 1078 = 11 \cdot 7 \cdot 14 = 2 \cdot 7^2 \cdot 11$ **et** $b_{11} = 161 = 7 \cdot 23$

$PGCD\left(a_{11}, b_{11}\right) = 7 = n - 4$

<u>Cas de n = 7 nombre de type 5k +2 :</u>

$a_7 = 730 = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ **et** $b_7 = 45 = 3 \cdot 15 = 3^2 \cdot 5$

$PGCD\left(a_7, b_7\right) = 5 \cdot 3 = 5(n-4)$.

Les valeurs du $PGCD\left(a_n, b_n\right)$ **sont conformes avec les résultats précédents.**

c) L'équation $1078x + 161y = 35$

peut s'écrire sous la forme $a_{11}x + b_{11}y = 35$

Or $PGCD(1078, 161) = PGCD\left(a_{11}, b_{11}\right) = 7$ **, on simplifie par 7 : on obtient l'équation équivalente (E):**

$154x + 23y = 5$.

On cherche une solution particulière de cette équation en utilisant l'algorithme d'Euclide (Division de a = 154 par b = 23) :

154 = 23*6+ 16	**a = 6b +16**	**16 = a – 6b**
23 = 16*1 + 7	**b = (a – 6b) + 7**	**7 = -a +7b**
16 = 7*2 +2	**a – 6b = (-a + 7b)*2 + 2**	**2 = 3a -20b**
7 = 2*3 + 1	**-a +7b = (3a -20b)*3 + 1**	**1 = -10a + 67b**

Vérifions : -10*154 + 67*23= -1540 + 1541 = 1
Multiplions par 5 :
-50*154 + 335*23 = 5
Alors (-50, 335) est une solution particulière de l'équation E.
Si (*x* , *y*) est une solution générale de (E) , alors on a : $154x + 23y = 5$
comme : 154*(-50) + 23*335 = 5
et par soustraction : $154*(x+50) + 23*(y-335) = 0$
Alors $154*(x+50) = -23*(y-335)$
Comme 154 et 23 sont premiers entre eux, cette égalité implique que 154 divise y-335
Il existe donc *k* dans Z tel que y – 335 = 154k.
Ceci conduit à : 154(*x* + 50) = -23*154*k* donc : *x* + 50 = -23*k*
Toute solution de (E) est donc de la forme (*x* = -50 – 23k, *y* = 335 +154*k*) où *k* est un entier relatif.
Réciproquement, on vérifie que le couple (-50 – 23k, 335 +154*k*) est bien solution de (E) pour tout *k* dans Z :
154(-50 – 23k) + 23(335 +154*k*) = -154*50-154*23k+23*335+23*154k
= -7700 +7705
= 5.

<u>Conclusion</u> :
L'ensemble des solutions de (E) est donc S = { (-20 + 12*k* , 10 - 5*k*) ; *k* ∈Z }.