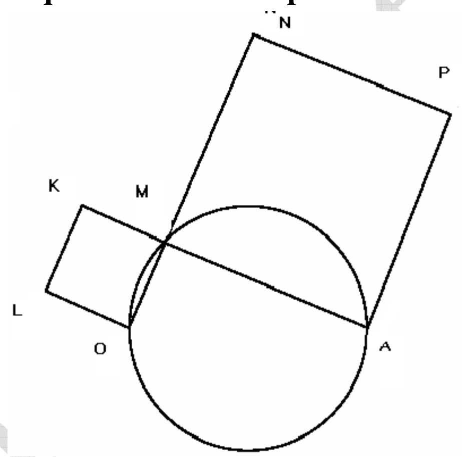
Correction de l'exercice 5 du Bac blanc – 21-12-2016
(Méthodes et astuces)

Exercice

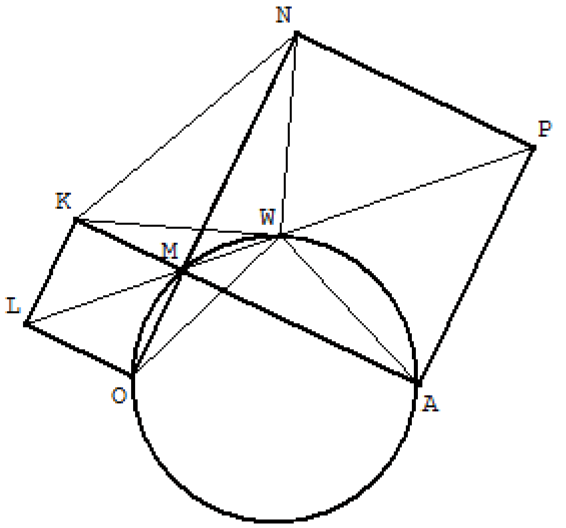
Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle C de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle C , et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-contre.
Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et démontrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.
On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1. On note k, l ,m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.



1) Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle C , on a $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.
2) Écrire en fonction de m chacun des nombres complexes k,l,n et p.
3. a) Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle C .
b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle C et préciser sa position sur ce cercle.
4. a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.
b) Quelle est la nature du triangle ΩNK ?
5) Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

Solution
1. Le centre du cercle C de diamètre [OA] est le milieu H du segment [OA], donc son affixe est $\frac{1}{2}$, le rayon du cercle C est $\frac{1}{2}$ car son diamètre OA = 1.
On a donc pour tout point M choisi sur le cercle C, $HM=\frac{1}{2}$ d'où $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

2) <u>1ère méthode : Nature d'un triangle</u>
Le triangle OMK est isocèle rectangle en M, direct.
$$\frac{0-m}{k-m}=i \Rightarrow -m=i(k-m) \Rightarrow k=(1+i)m$$
Le triangle LOM est isocèle rectangle en O, direct.
$$\frac{l-0}{m-0}=i \Rightarrow l=im$$
Le triangle NMA est isocèle rectangle en M, direct.
$$\frac{n-m}{1-m}=i \Rightarrow n-m=i(1-m) \Rightarrow n=(1-i)m+i$$
Le triangle MAP est isocèle rectangle en A, direct.
$$\frac{m-1}{p-1}=i \Rightarrow m-1=i(p-1) \Rightarrow p=1+i-im$$
Remarque : On peut déterminer l'affixe l de L a partir du parallélogramme OMKL :
$$\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{MK} \Rightarrow l=k-m=(1+i)m-m=im$$
De la même manière dans le parallélogramme APMM :
$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AM} \Rightarrow n-p=m-1 \Rightarrow n=m-1+p=m-1+1+i-im=(1-i)m+i$$



2$^{\text{ème}}$ méthode : Transformations (rotations ou similitudes)

K est l'image de O par la rotation de centre M, d'angle $-\frac{\pi}{2}$, on a donc

$$\begin{cases}(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MK}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ MO = MK\end{cases} \Rightarrow k-m=-i(-m)$$

$\Rightarrow k=(1+i)m$

L est l'image de M par la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\begin{cases}(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ OM = OL\end{cases} \Rightarrow l=im$$

N est l'image de A par la rotation de centre M, d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\begin{cases}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MN}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ MA = MN\end{cases} \Rightarrow n-m=i(1-m)$$

$n=(1-i)m+i$

***P* est l'image de *M* par la rotation de centre *A*, d'angle $-\frac{\pi}{2}$,**

$$\begin{cases}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AM = AP\end{cases} \Rightarrow p-1=e^{-i\frac{\pi}{2}}(m-1)$$ **.on a donc** $p=-i(m-1)+1$ **soit** $p=-im+i+1$.

Remarque :

On peut utiliser des similitudes directes de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Par exemple, K est l'image de M par la similitude directe de contre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

3. a. Le milieu Ω du segment [PL] a pour affixe $\frac{p+l}{2}=\frac{-im+1+i+im}{2}=\frac{1+i}{2}$; comme *m* n'apparaît plus, Ω ne dépend pas de *M*. Ω est un point fixe quelque soit la position de M sur C.

b. On a évidemment $\left|\frac{1+i}{2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$ égalité de type $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$. Donc Ω appartient au cercle C. Les coordonnées de $\Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ dans le repère considéré montrent que Ω est à l'intersection de C et de la médiatrice de [*OA*] du coté de P et L.

4. a.) <u>1ère méthode : Symétrie axiale</u>

Soit S la réflexion d'axe la droite (LP), passant par M . On a $S(K)=O$ et $S(N)=A$. Alors $KN=OA$ d'où $KN=1$.

<u>2ème méthode : Théorème de Pythagore</u>

Dans les triangles KMN et OMA rectangles en M, on a :

$$KN^2=MK^2+MN^2=MO^2+MA^2=OA^2 \Rightarrow KN=OA \Rightarrow KN=1$$

<u>3ème méthode : Modules</u>

Par le calcul on a $KN=|n-k|=|(1-i)m+i-(1+i)m|=|i-2mi|=|2i|\left|\frac{1}{2}-m\right|=2.\frac{1}{2}=1$.

b. <u>1ère méthode : Symétrie axiale</u>

Le triangle ΩNK est l'image du triangle ΩOA isocèle rectangle en Ω par la réflexion S. Alors ΩNK est isocèle rectangle en Ω.

<u>2ème méthode :Rapport des affixes</u>

$$\frac{z_\Omega - z_K}{z_\Omega - z_N}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-(1+i)m}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-(1-i)m-i}=\frac{1+i-2(1+i)m}{1-i-2(1-i)m}=\frac{\left(1-i-2(1-i)m\right)i}{1-i-2(1-i)m}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Alors $\begin{cases}(\overrightarrow{\Omega N},\overrightarrow{\Omega K})=\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \Omega N=\Omega K\end{cases}$**, d'où ΩNK est isocèle rectangle en Ω.**

5. <u>1ère méthode : Symétrie axiale</u>

La réflexion S transforme N en A et Ω en Ω (Ω est situé sur l'axe (MP) de S). Alors $\Omega N=\Omega A$.

Puisque ΩNK est isocèle rectangle d'hypoténuse KN , son côté est $\frac{1}{\sqrt{2}}KN=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\Omega N=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Alors N parcourt un cercle de centre Ω de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C'est aussi le cercle de centre Ω passant par A.

<u>2ème méthode :Modules</u>

$$\Omega N=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-(1-i)m-i\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-(1-i)m\right|=\left|(1-i)(\frac{1}{2}-m)\right|=|1-i|\left|\frac{1}{2}-m\right|=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Alors N parcourt un cercle de centre Ω de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.