Correction de l'exercice 1 du Bac blanc – 23-12-2016
(Solution détaillée)

Exercice 1

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Questions	Réponses A	Réponses B	Réponses C	Réponses D
1	Si $z_1 = \sqrt{3} - i$, alors $\left\|z_1^3\right\| =$	$3\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3}-1\right)^3$	8	27
2	Si $z_2 = 2+2i$; alors un argument de $\left(\overline{z}_2\right)^2$ est :	$\theta_2 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$	$\theta_2 = \frac{-\pi}{2}$	$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$	$\theta_2 = \frac{-\pi}{8}$
3	A, B et C trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que $z_C - z_A = \frac{z_B - z_A}{2}$, alors :	C est le milieu du segment [AB]	B est le milieu du segment [AC]	A est le milieu du segment [BC]	A,B, et C ne sont pas alignés
	Dans tous ce qui suit (u_n) est une suite à termes strictement positifs, on définit la suite $v_n = \frac{2}{u_n}$;				
4	si (u_n) est majorée par 2 alors :	v_n est majorée par 2	v_n est minorée par 2	v_n est minorée par 1	v_n est bornée
5	si (u_n)et (v_n) sont adjacentes alors :	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 2$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sqrt{2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n < \lim\limits_{n\to\infty} v_n$
6	si (u_n)est décroissante alors (v_n) est:	Croissante	Décroissante	Constante	Non monotone

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Solution

1) Soit $z_1 = \sqrt{3} - i$, on cherche à calculer $\left|z_1^3\right|$, on applique la propriété $\left|z^n\right| = |z|^n$ on obtient :

$$\left|z_1^3\right| = |z_1|^3 = \left(\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}\right)^3 = 2^3 = 8$$

2) Soit $z_2 = 2+2i$ on cherche à déterminer un argument de $\left(\overline{z}_2\right)^2$, on applique les deux propriétés suivantes relatives à l'argument : $\arg\left(z^n\right) = n.\arg(z)$ et $\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z)$.

Donc $\arg\left(\overline{z}_2^2\right) = 2\times\arg\left(\overline{z}_2\right) = 2\times\left(-\arg\left(z_2\right)\right) = -2\times\arg(2+2i) = -2\times\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

3) A, B et C trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que $z_C - z_A = \frac{z_B - z_A}{2}$, cette égalité est équivalente à écrire : $Z_{\overrightarrow{AC}} = \frac{1}{2}.Z_{\overrightarrow{AB}}$ autrement dit : $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$ donc C est le milieu du segment [AB].

4) (u_n) est une suite à termes strictement positifs, et $v_n = \frac{2}{u_n}$; on suppose que (u_n) est majorée par 2 c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \Rightarrow 2.\frac{1}{2} \leq 2.\frac{1}{u_n}$ soit $1 \leq v_n$. Il en résulte que la suite (v_n) est minorée par 1.

5) u_n et v_n sont adjacentes si elles admettent la même limite. On note l cette limite, en utilisant l'égalité $v_n = \frac{2}{u_n}$ et par passage à la limite on obtient : $l = \frac{2}{l} \Rightarrow l^2 = 2$ soit $l = \pm\sqrt{2}$ la suite (u_n) étant une suite à termes strictement positifs $\Rightarrow l > 0$ et par suite on a : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sqrt{2}$

6) On suppose que (u_n) est décroissante c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{u_{n+1}} \Rightarrow \frac{2}{u_n} \leq \frac{2}{u_{n+1}}$ c-à-d $v_n \leq v_{n+1}$ on en déduit que la suite (v_n) est croissante.

D'où le tableau ci-contre :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	C	B	A	C	B	A