# Correction de l'exercice 2 du Bac blanc – 23-12-2016
## (Solution détaillée)

## Exercice

**Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites numériques définies par :** $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

**1) Calculer $u_1, u_2$ et $v_1$ , $v_2$.**

**2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$**

**a) Montrer que $w_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.**

**b) Exprimer $w_n$ en fonction de n et préciser sa limite.**

**3) Etudier les sens de variations de deux suites $u_n$ et $v_n$, puis démontrer que $u_n$ et $v_n$ sont adjacentes**

**4) a) Démontrer que la suite $t_n$ définie par : $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ est une suite constante.**

**b) En déduire la limite commune de $u_n$ et $v_n$.**

## Solution

**Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites numériques définies par :** $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

**1) Calcul de $u_1, u_2$ et $v_1$ , $v_2$ :**

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow \boxed{u_1 = \frac{7}{2}} \quad ; v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2}+4}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{2} = \frac{15}{4}$$

$$\rightarrow \boxed{v_1 = \frac{15}{4}}$$

**De la même manière on calcule $u_2$ et $v_2$ :**

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{29}{4}}{2} = \frac{29}{8} \rightarrow \boxed{u_2 = \frac{29}{8}} \quad \text{et } v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{59}{8}}{2} = \frac{59}{16} \rightarrow \boxed{v_2 = \frac{59}{16}}$$

**2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $w_n = v_n - u_n$**

**a) On montre que $w_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ :**

Nous avons $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2}$ ( on remplace $u_{n+1}$ et $v_{n+1}$ par leurs valeurs dans les formules de récurrences)

$$\Rightarrow w_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{u_{n+1}+\cancel{v_n}-u_n-\cancel{v_n}}{2} = \frac{u_{n+1}-u_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n+v_n}{2}-u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n+v_n-2u_n}{2}\right) = \frac{1}{4}(v_n-u_n) = \frac{1}{4}.w_n$$

donc $w_n$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

b) Expression de $w_n$ en fonction de n :

$w_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 4-3=1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$w_n = w_0.q^n = 1.\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

* Calcul de la limite de $w_n$ :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. La raison de la suite $w_n$ vérifie $|q| = \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$

3) Sens de variations de $u_n$ et $v_n$ :

Nous avons : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{u_n+v_n-2u_n}{2} = \frac{v_n-u_n}{2} = \frac{1}{2}(v_n-u_n) = \frac{1}{2}.w_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$

Donc $u_n$ est une suite strictement croissante.

De la même façon on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - v_n = \frac{u_{n+1}+v_n-2v_n}{2} = \frac{1}{2}.(u_{n+1}-v_n) = \frac{1}{2}.\left[\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) - v_n\right] = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{2}v_n$$

$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}v_n = -\frac{1}{4}.(v_n - u_n) = -\frac{1}{4}w_n < 0$. Donc $v_n$ est strictement décroissante.

* On montre que $u_n$ et $v_n$ sont adjacentes :

La suite $u_n$ est une suite strictement croissante, la suite $v_n$ est strictement décroissante. De plus, d'après la question 2) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ . On en déduit que $u_n$ et $v_n$ sont adjacentes

4) $(t_n)$ est la suite définie par : $t_n = \frac{u_n+2v_n}{3}$

a) On démontrer que la suite $t_n$ est constante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n = \frac{u_n+2v_n}{3}$

$$\Rightarrow t_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3}=\frac{\frac{u_n+v_n}{2}+2.\frac{u_{n+1}+v_n}{2}}{3}=\frac{\frac{u_n+v_n}{2}+u_{n+1}+v_n}{3}=\frac{\frac{u_n+v_n}{2}+\frac{u_n+v_n}{2}+v_n}{3}=\frac{2\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)+v_n}{3}=\frac{u_n+2v_n}{3}=t_n$$

**Donc pour tout entier naturel n, on a $t_{n+1}=t_n$ la suite $(t_n)$ est donc constante.**

**b) Calcul de la limite de $u_n$ et $v_n$ :**

**Pour tout** $n\in\mathbb{N}$, $t_{n+1}=t_n=t_0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} t_n=t_0=\frac{u_0+2v_0}{3}=\frac{3+2\times 4}{3}=\frac{11}{3}$

**D'autre part,** $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n+2v_n}{3}=\frac{11}{3}$ **et puisque** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty} v_n=l$ **on en déduit que** $\frac{l+2l}{3}=\frac{11}{3}$ **soit** $\boxed{l=\frac{11}{3}}$.