Correction de l'exercice 3 du Bac blanc – 23-12-2016
(Solution détaillée)

Exercice

On considère le polynôme $P(z)$ défini pour tout nombre complexe z par : $P(z)=z^3-6z^2+13z-10$.

1) Calculer $P(2)$.

2) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$.

3) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-4z+5=0$, et soient z_1 et z_2 ses solutions telles que $\operatorname{Im}(z_1)>0$.

4) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé$(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A=2$, $z_B=z_1+i$ et $z_C=z_2-i$

a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Que représente le point A pour le segment [BC] ? Justifier par un calcul d'affixes.

c) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $Z=\dfrac{z_C}{z_B}$, puis interpréter graphiquement.

5) Déterminer puis construire dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les ensembles suivants :

a) Γ_1 ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2|=|z-2-2i|$.

b) Γ_2 ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-2-2i}{z-2+2i}$ soit imaginaire pur.

c) Γ_3 ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2|=3$.

d) Γ_4 ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg\left(\dfrac{z-2-2i}{z-2}\right)=0\,[2\pi]$.

Solution

Pour tout nombre complexe z, on donne $P(z)=z^3-6z^2+13z-10$.

1) Calcul du $P(2)$: $P(2)=2^3-6\times2^2+13\times2-10=8-24+26-10=34-34=0$

2) Détermination des coefficients a et b tels que : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

On peut utiliser l'une des trois méthodes connues :

* **1ère méthode :** Tableau d'Horner :

	1	-6	13	-10
2		2	-8	-10
	1	-4	5	0

$a=-4,\ b=5$ et $P(2)=0 \Rightarrow \boxed{P(z)=(z-2)(z^2-4z+5)}$

* **2ième méthode :** Identification :

$P(z)=(z-2)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz-2z^2-2az-2b=z^3+(a-2)z^2+(b-2a)z-2b$ et $P(z)=z^3-6z^2+13z-10$.

Par identification des coefficients dans les deux écritures du polynôme P on obtient :

$$\begin{cases}a-2=-6\\ b-2a=13\\ -2b=-10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-4\\ b=5\end{cases} \Rightarrow \boxed{P(z)=(z-2)(z^2-4z+5)}$$

* **3ième méthode :** La Division Euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} z^3-6z^2+13z-10 & z-2 \\ \hline -(z^3-2z^2) & z^2-4z+5 \\ -4z^2+13z & \\ -(-4z^2+8z) & \\ 5z-10 & \\ -(5z-10) & \end{array}$$

$\boxed{0}$ $\Rightarrow \boxed{P(z)=(z-2)(z^2-4z+5)}$

1) **Résolution de l'équation (E) : $z^2-4z+5=0$**

On calcule le discriminant $\Delta=b-4ac=(-4)^2-4\times1\times5=16-20=-4=(2i)^2$ $\Delta<0$ cette admet deux solutions complexes conjuguées : z_1 et z_2 avec $\operatorname{Im}(z_1)>0$

$\Rightarrow z_1=\dfrac{-(-4)+2i}{2}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$ **et** $z_2=\dfrac{4-2i}{2}=2-i$

2) **Les points A , B et C sont définis par leurs affixes :**

$z_A=2,\quad z_B=z_1+i=(2+i)+i=\boxed{2+2i}$ **et** $z_C=z_2-i=(2-i)-i=\boxed{2-2i}$

d) **Placement des points A , B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$: voir figure 1.**

e) **D'après la figure le point A est le milieu du segment [BC]**

De plus $\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{2+i+2-i}{2}=\dfrac{2+i+2-i}{2}=\dfrac{4}{2}=2=z_A$.

f) $Z=\dfrac{z_C}{z_B}=\dfrac{2-2i}{2+2i}=\dfrac{(2-2i)\times(2-2i)}{(2+2i)\times(2-2i)}=\dfrac{(2-2i)^2}{2^2-(2i)^2}=\dfrac{2^2-2\times2\times2i+(2i)^2}{2^2-(2i)^2}=\dfrac{4-8i-4}{4+4}=\dfrac{-8i}{8}=-i$,

Interprétation graphique : $Z=\dfrac{z_C}{z_B}=\dfrac{z_C-z_O}{z_B-z_O}=-i$ **le triangle BOC est donc rectangle isocèle en O.**

5) **Détermination et construction des ensembles:**

a) Γ_1 **ensemble des points M d'affixe z tels que** $|z-2|=|z-2-2i|$.

$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow |z-2|=|z-2-2i|=|z-(2+2i)| \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow$ **MA=MB**

Il s'agit donc de la médiatrice du segment [AB] (voir figure).

b) Γ_2 **ensemble des points M d'affixe z tels que** $\dfrac{z-2-2i}{z-2+2i}$ **soit imaginaire pur.**

$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow \dfrac{z-2-2i}{z-2+2i}\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z-z_B}{z-z_C}\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M\in\zeta([BC])/\{C\}$ Γ_2 **est le cercle de diamètre [BC] privé de C.**

c) Γ_3 **ensemble des points M d'affixe z tels que** $|z-2|=3$.

$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow |z-2|=3 \Leftrightarrow |z-z_A|=3 \Leftrightarrow M\in\zeta(A;3)$. Γ_3 **est le cercle de centre A et de rayon r=3.**

d) Γ_4 **ensemble des points M d'affixe z tels que** $\arg\left(\dfrac{z-2-2i}{z-2}\right)=0\,[\pi]$.

$$M\in\Gamma_4 \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z-2-2i}{z-2}\right)=0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=0\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})=0\ [\pi] \Leftrightarrow M\in(AB)/\{A,B\}$$

Γ_4 **est la droite (AB) privée de A et B.**

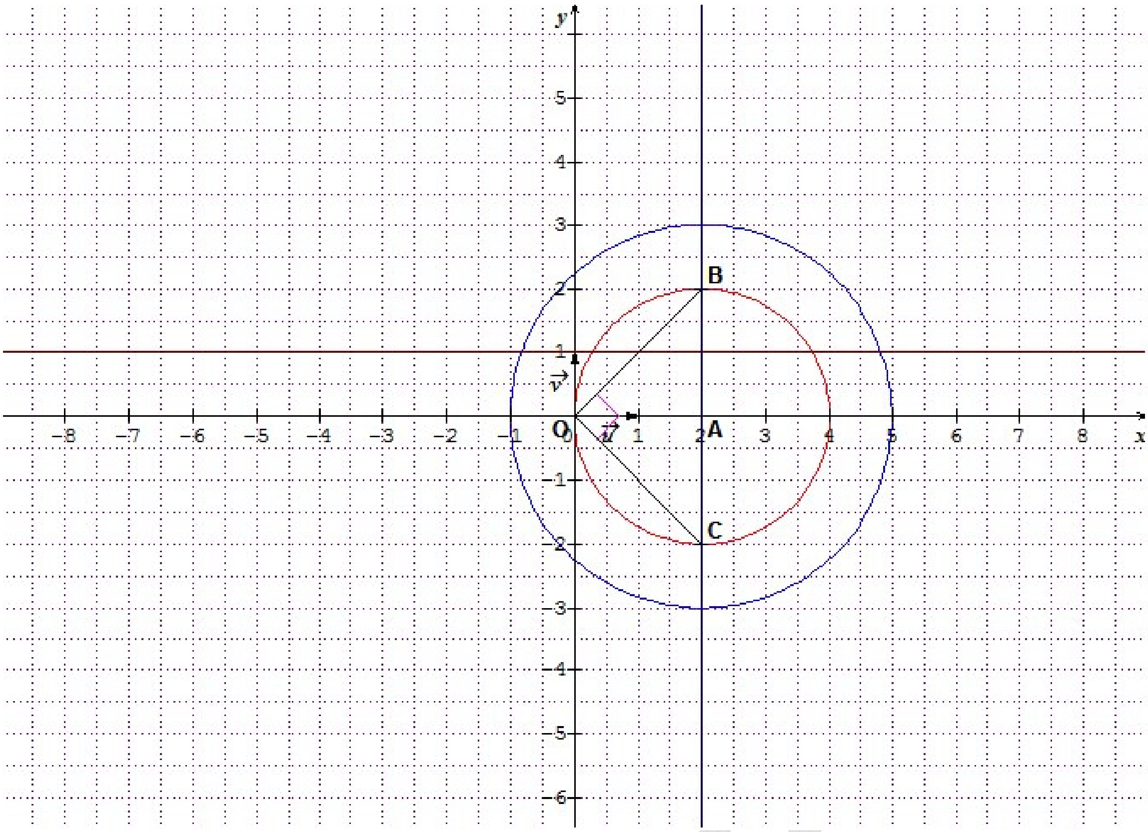

Figure 1