Correction de l'exercice 4 du Bac blanc – 23-12-2016
(Solution détaillée)

Exercice

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in N}$ définie par : $z_0 = i$ et pour tout entier n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}.z_n$.

Pour n entier naturel, on appelle M_n le point d'affixe z_n .

1) Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 .

2) Donner le module et un argument du nombre complexe $\alpha = \frac{1+i}{2}$, puis en déduire sa forme exponentielle.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $z_n = \frac{ie^{i\frac{n\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$

4) En déduire que la suite $V_n = |z_n|$ est une suite géométrique. Donner son terme général et sa limite.

5) Déterminer les valeurs de n dans les cas suivants :

a) M_n est un point de l'axe des ordonnées (oy).

b) M_n appartient à la droite d'équation : $y = x$.

Solution

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in N}$ définie par : $z_0 = i$ et pour tout entier n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}.z_n$.

Pour n entier naturel, on appelle M_n le point d'affixe z_n .

1) Calcul de z_1, z_2, z_3 et z_4 : D'après la formule de récurrence :

$$z_1 = \frac{1+i}{2}.z_0 = \frac{1+i}{2}\times i = \frac{i(1+i)}{2} = \boxed{\frac{-1+i}{2}} \quad ; \quad z_2 = \frac{1+i}{2}.z_1 = \frac{1+i}{2}\times\frac{-1+i}{2} = \frac{-1+i-i+i^2}{4} = \frac{-2}{4} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2}.z_2 = \frac{1+i}{2}\times\frac{-2}{4} = \frac{-2-2i}{8} = \boxed{\frac{-1-i}{4}} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{1+i}{2}.z_3 = \frac{1+i}{2}\times\frac{-1-i}{4} = -\frac{(1+i)^2}{8} = -\frac{1+2i+i^2}{8} = \boxed{\frac{-i}{4}}$$

2) $$\alpha = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \Rightarrow |\alpha| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit $\theta = \arg(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{a}{|\alpha|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\alpha) = \frac{b}{|\alpha|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ on en déduit que $\theta = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

D'où la forme exponentielle $\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

3) On démontre que pour tout entier naturel n , $z_n = \frac{ie^{i\frac{n\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$

<u>1</u>

1ière méthode : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}.z_n$ la suite complexe $(z_n)_{n\in N}$ est donc une suite géométrique de raison $\alpha = \frac{1+i}{2}$

$$\Rightarrow \forall n\in N,\ z_n = z_0.\alpha^n = i.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = i.\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{i.e^{i\frac{n\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$$

2ième méthode : l'égalité ci-dessus peut aussi être démontrer par récurrence en effet :

* Pour n = 0 , $\frac{i.e^{i\frac{0\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{0}} = \frac{i\times 1}{1} = i = z_0$ l'égalité est vraie pour n=0.

* Si $z_n = \frac{ie^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}$ alors $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}\times z_n = \alpha\times\frac{ie^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.e^{i\frac{\pi}{4}}\times\frac{ie^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}} = \frac{ie^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}$ ainsi l'égalité peut se généraliser pour tout entier n.

1) La suite (V_n) est définie par $V_n = |z_n|$

On montre que (V_n) est géométrique :

On calcule $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\left|\frac{ie^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{ie^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}\right|} = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Donc (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $V_0 = |z_0| = |i| = 1$ d'où le terme général $\boxed{V_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}$

La limite de (V_n) : il s'agit d'une suite géométrique de raison q avec $|q| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Donc $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$

5) Détermination des valeurs de n :

a) Si M_n est un point de l'axe des ordonnées (oy) cela veut dire que son affixe z_n est un nombre complexe imaginaire pur autrement dit $arg(z_n) = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow arg\left(\frac{ie^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \arg\left(ie^{i\frac{n\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \cancel{\frac{\pi}{2}}+\frac{n\pi}{4} = \cancel{\frac{\pi}{2}}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ soit

$\boxed{n = 4k\ , k\in Z}$

b) M_n appartient à la droite d'équation : $y = x$ cela veut dire que l'argument de z_n est de la forme $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow arg\left(\frac{ie^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}\right) = \frac{\pi}{4}+k\pi \Rightarrow \arg\left(ie^{i\frac{n\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n\pi}{4} = \frac{-\pi}{4}+k\pi$ soit $\boxed{n = 4k - 1\ , k\in Z}$.