PRIMITIVES – 7C

Cours inversé

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que F'=f sur I.

Exemple 1 :

On considère les fonctions suivantes :

$\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **et** $\mathbf{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x + 3$ $\qquad$ $x \longmapsto x^2 + 3x - 1$

On constate que $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.

On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

" F a pour dérivée f " et " f a pour primitive F ".

Exemple 2 :

Comment démontrer ou vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre ?

Vidéo 1

Vidéo

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ **par** $f(x) = x + 1$.

Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ **est une primitive de f sur** $\mathbb{R}$ **.**

La fonction F est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$**. On dérive la fonction F :**

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2 \times \frac{1}{2}x + 1 + 0. \\ &= x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

Donc : $F' = f$.

Et donc F est une primitive de f.

Exemples 3 :

Fonction f	Primitive F	Intervalle I
$2x$	x^2	$\mathbb{R}$
$7x^3$	$\frac{7}{4}x^4 - 2021$	$\mathbb{R}$
5sinx	-5cosx	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + 2022$	$]0, +\infty[$

2) Propriétés

Propriété 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Exemple 4:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2-2x+7$.

Montrer que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Solution

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^2-2x+7$ est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$. Alors f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

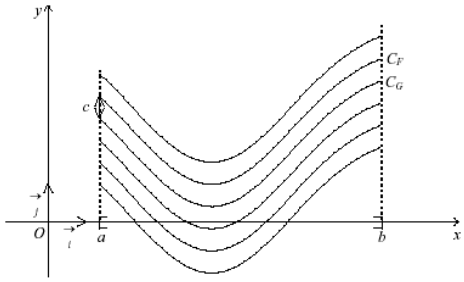
Propriété 2

Soit F une primitive de f sur un intervalle I ; alors :

*** Pour tout réel k, la fonction G=F+k est aussi une primitive de f sur I.**

**** Toute primitive de f sur I est de ce type.**

*****Les représentations graphiques C_F et C_G se correspondent par une translation de vecteur $k\vec{j}$.**



Exemple 5 :

En général, on considère une primitive F de f sur un intervalle I.
On pose $G(x) = F(x) + k$.
G est dérivable sur I car F l'est.
$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.
Donc G est une primitive de f sur I.
D'après l'exemple 2, la fonction G définie par $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2022$ est également une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Toute autre primitive de f sur $\mathbb{R}$ est de la forme $H(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + k$ où k est un réel quelconque.

Propriété 3

Etant donné un réel x_0 de I et un réel quelconque y_0 ,

il existe une unique primitive F de f sur I telle que

$F(x_0)=y_0$. Autrement dit, Une seule des courbes passe par un point donné $M_0(x_0, y_0)$.

Exemple 6 :

Comment déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition $F(x_0) = y_0$?

Vidéo 2

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.
1) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x^2 - 3x$ est une primitive de f.
2) Déterminer la fonction G primitive de f telle que $G(2) = 1$.

<u>Solution</u>
1) F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 2x - 3 = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2) G est une primitive de f donc G est de la forme $G(x) = x^2 - 3x + k$, $k \in \mathbb{R}$.
Comme $G(2) = 1$, on a :
$2^2 - 3 \times 2 + k = 1$
$-2 + k = 1$
$k = 1 + 2 = 3$
D'où $G(x) = x^2 - 3x + 3$.
C'est l'unique primitive de f dont la courbe passe par le point $M_0(2,1)$.

Vidéo 3

<u>Propriété</u> 4

Toute primitive F de f sur un intervalle I est continue sur I.

C'est important et évident car F est dérivable sur I.

3) Calcul de primitives

3.1)Tableau des primitives usuelles

Fonction f	Primitives de f	Commentaire
$x \mapsto a$, a réel	$x \mapsto ax + k$	Sur $I = \mathbb{R}$
$x \mapsto ax^n$; $n \neq -1$ entier relatif	$x \mapsto \dfrac{a}{n+1}x^{n+1} + k$	Sur $\mathbb{R}$, si $n \in \mathbb{N}$ Sur $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$, si $n \leq -2$.
$x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{x} + k$	Sur $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k$	Sur $\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$x \mapsto \dfrac{-1}{a}\cos(ax+b) + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k$	Sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + k$	Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exemples 7

Vidéo 4

Vidéo

2)Opérations sur les primitives

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I de dérivées continues sur I.

Fonction f	Une primitive de f
au', a réel	au
$u'+v'$	$u+v$
$u'u^n;\quad n\neq -1$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$v'\times(u'ov)$	uov

Exemples 8

Vidéo 5

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = 4x^3$ c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

d) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ e) $f(t) = 5\cos(2t - \pi)$ f) $f(t) = -3\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$

Solution

a) $f(x) = x^4$ donc $F(x) = \frac{1}{4+1}x^{4+1} = \frac{1}{5}x^5$

b) $f(x) = 4x^3$ donc $F(x) = 4\frac{1}{3+1}x^{3+1} = 4\frac{1}{4}x^4 = x^4$

c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ donc $F(x) = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + 2\frac{1}{2+1}x^{2+1} + 1x = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 1$

d) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ donc :

$$F(x) = 5\frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 6x = \frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 6x$$

e) $f(t) = 5\cos(2t - \pi)$ donc $F(t) = \frac{5}{2}\sin(2t + \pi)$ car $\cos \to \sin$

f) $f(t) = -3\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ donc $F(t) = -\ \frac{-3}{5}\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ car $\sin \to -\cos$

et donc $F(t) = \frac{3}{5}\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Vidéo 6

Evaluations en ligne (non notées) : Exercices corrigés 1 (Exercices corrigés de primitives - simples)

Exercices corrigés 2 **Exercices corrigés 3**

Evaluations en ligne (notées) : Le lien sera partagé ultérieurement

Visioconférences : Les liens seront partagés ultérieurement.