Exercice corrigé

Enoncé (Exercice 2 Bac 2007 Sn)

Dans le plan orienté, on considère le losange direct $ABCD$ de centre I tel que $IB = 2IC = 2a$. On désigne Γ_1 le cercle de centre C et de rayon $CI = a$ et par Γ_2 le cercle de centre B et de rayon $BI = 2a$.

1.a) Faire une figure (On pourra prendre (BD) horizontale).

b) Placer sur la figure précédente les points E et F tels que : $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$.

2. On considère l'ensemble Γ_3 des points M du plan tels que : $\frac{MB}{MC} = 2$.

a) Vérifier que les points I, E et F appartiennent à Γ_3.

b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_3.

3. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme C en B et A en I. Déterminer l'angle et le centre Ω de cette rotation. Placer Ω sur la figure.

4.a) Montrer qu'il existe une unique similitude s qui transforme C en B et A en D.

b) Montrer que $s(I) = I$.

c) Donner les éléments caractéristiques de s.

d) Montrer que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

5. On pose $f = h \circ r$, où h est l'homothétie de centre B et de rapport 2, et r la rotation définie en 3).

a) Montrer que $f = s$.

b) Donner la forme réduite de s.

6. Soit s' une similitude directe qui transforme Γ_1 en Γ_2.

a) Montrer que toutes les similitudes s' sont de même rapport k' que l'on déterminera.

b) Déterminer le lieu géométrique des centres des similitudes s'.

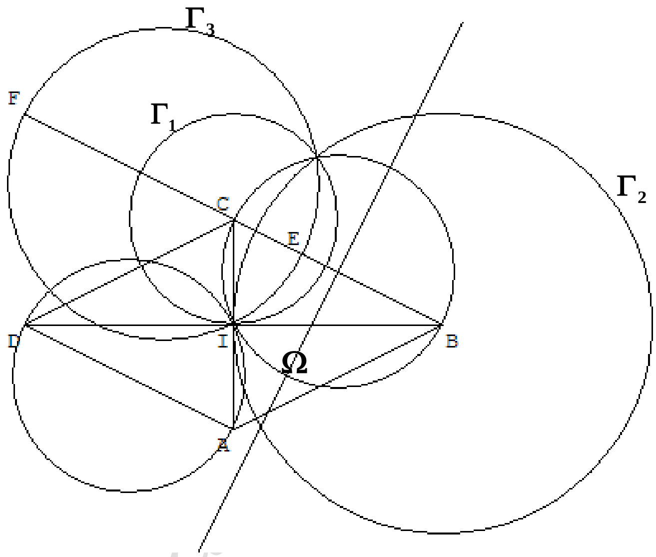
c) Dans le cas où s' est une homothétie, donner les positions possibles du centre et les valeurs du rapport de cette homothétie.

Corrigé

Dans le plan orienté, on considère le losange direct $ABCD$ de centre I tel que $IB = 2IC = 2a$.

On désigne Γ_1 le cercle de centre C et de rayon $CI = a$ et par Γ_2 le cercle de centre B et de rayon $BI = 2a$.

1.a) Figure



b) Pour placer les points E et F :

On a $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$, d'où

E=bar

B	C
1	2

donc $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

On a aussi $\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$ d'où

F=bar

B	C
1	-2

Donc $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$

2. Γ_3 est l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MB}{MC} = 2$.

a) Pour vérifier que les points I, E et F appartiennent à Γ_3, on a :

$$\begin{cases} CI = a \\ BI = 2a \end{cases} \Rightarrow \frac{IB}{IC} = 2 \Rightarrow I \in \Gamma_3$$

$$\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}\Rightarrow EB=2EC\Rightarrow\frac{EB}{EC}=2\Rightarrow E\in\Gamma_3$$

$$\overrightarrow{FB}-2\overrightarrow{FC}=\vec{0}\Rightarrow FB=2FC\Rightarrow\frac{FB}{FC}=2\Rightarrow F\in\Gamma_3$$

<u>Conclusion</u> : Les points I, E et F appartiennent à Γ_3.

b) Pour déterminer et construire l'ensemble Γ_3 on remarque immédiatement que Γ_3 est le cercle circonscrit au triangle IEF.

Avec une autre méthode, on a :

$$\begin{aligned}M\in\Gamma_3&\Leftrightarrow\frac{MB}{MC}=2\\&\Leftrightarrow MB^2-4MC^2=0\\&\Leftrightarrow(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})=0\\&\Leftrightarrow-\overrightarrow{MF}\cdot3\overrightarrow{ME}=0\\&\Leftrightarrow\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{ME}=0\end{aligned}$$

On en déduit que Γ_3 est le cercle de diamètre $[EF]$ où E et F sont les points définis précédemment.

Pour la construction, voir la figure.

3. Pour montrer l'existence et l'unicité d'une rotation r qui transforme C en B et A en I, on a : $CA=BI=2a\neq0$ et $\overrightarrow{CB}\neq\overrightarrow{AI}$, donc il existe une unique rotation r telle que :

$$\begin{array}{c}r\\C\longrightarrow B\\A\longrightarrow I\end{array}$$

- **L'angle de r est $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BI})=(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID})=\frac{-\pi}{2}\quad[2\pi]$.**
- **Le centre Ω de r est le point d'intersection des médiatrices des segment $[BC]$ et $[AI]$ (voir figure).**

On peut aussi remarquer que le centre est le point d'intersection des cercles de diamètres [BC] et [AI] autre que I, car r(A) = I.

4.a) On a $CA\neq0$ et $BD\neq0$, donc il existe une unique similitude

s qui transforme C en B et A en D.

b) Pour montrer que $s(I)=I$, on a :

$$\begin{aligned} C &\xrightarrow{s} B \\ A &\longrightarrow D \end{aligned}$$

On sait que la similitude directe conserve le milieu. Donc s transforme le milieu I du segment $[CA]$ au milieu du segment $[BD]$ d'où $s(I) = I$.

c) Eléments caractéristiques de s :

- Le centre de s est I car $s(I) = I$.
- L'angle de s est $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}) = \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$
- Le rapport de s est $\frac{BD}{CA} = \frac{BI}{CI} = 2$.

d) Pour montrer que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$, on sait que l'image par s du cercle Γ_1 de centre C et de rayon $CI = a$ est le cercle de centre $s(C) = B$ et de rayon $BI = 2a$, c'est-à-dire le cercle Γ_2.

Autrement dit, on a :

$$\begin{aligned} C &\xrightarrow{s} B \\ I &\longrightarrow I \end{aligned}$$

Donc s transforme le cercle de centre C passant par I au cercle de centre B passant par I. Alors $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

5. On a $f = h \circ r$, où h est l'homothétie de centre B et de rapport 2, et r la rotation définie en 3).

a) Pour montrer que $f = s$, on sait que la composée d'une homothétie et d'une rotation est une similitude directe. De plus on a :

$$\begin{cases} f(C) = h(r(C)) = h(B) = B \\ f(A) = h(r(A)) = h(I) = D \end{cases}$$

Donc f est une similitude directe qui vérifie :

$$\begin{aligned} C &\xrightarrow{f} B \\ A &\longrightarrow D \end{aligned}$$

Or s est l'unique similitude qui transforme C en B et A en D , donc $f = s$.

<u>Autre méthode :</u>

- Le rapport de f est égal à 2 ; donc le même rapport de s.
- L'angle de f est celui de r car le rapport de l'homothétie est positif, donc le même angle de s.

- On a aussi $f(I)=h\circ r(I)=h(r(I))=h(I')=I$, avec I' le milieu de [BI], donc f a le même centre que s.

Alors f et s ont les mêmes éléments caractéristiques. D'où f =s.

b) La forme réduite de s est $s=h'\circ r'=r'\circ h'$ où h' est l'homothétie de centre I et de rapport 2, et r' est la rotation de même centre I et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

6. Soit s' une similitude directe qui transforme Γ_1 en Γ_2.

a) Comme le rayon de Γ_1 est $r_1=a$ et le rayon de son image Γ_2 par s' est $r_2=2a$, le rapport de s' est : $k'=\frac{2a}{a}=2$. On en déduit que toutes les similitudes s' qui transforment Γ_1 en Γ_2 sont de même rapport $k'=2$.

b) Toutes les similitudes s' qui transforment Γ_1 en Γ_2 transforment impérativement C, centre de Γ_1 en B centre de Γ_2.

Soit M le centre d'une telle similitude s'.

Alors $\begin{matrix} C \xrightarrow{s'} B \\ M \longrightarrow M \end{matrix}$ donc $\frac{MB}{MC}=2$. On en déduit donc que M appartient à Γ_3.

Réciproquement : si M appartient à Γ_3 on a $MB\neq 0$ et $MC\neq 0$ car B et C n'appartiennent pas à Γ_3. Donc il existe une unique similitude directe s' qui vérifie $\begin{matrix} C \xrightarrow{s'} B \\ M \longrightarrow M \end{matrix}$. Comme M appartient à Γ_3, $\frac{MB}{MC}=2$ donc s' a pour rapport 2. Alors s' est de centre M et elle transforme Γ_1 en Γ_2.

<u>En conclusion</u> : Le lieu géométrique des centres des similitudes s' est le cercle Γ_3 de diamètre $[EF]$.

c) La similitude s' est une homothétie dans le cas où son angle est plat ou nul, c'est-à-dire que son centre M est aligné avec les points B et C, d'autre part le cercle Γ_3 lieu géométrique des centres de s' coupe la droite (BC) en E et F.

Comme: $\overrightarrow{EB}=-2\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{FC}$, il existe deux cas dans lesquels la similitude s' est une homothétie :

- La similitude de centre E et d'angle $\alpha_1=\pi$ qui est l'homothétie h_1 de centre E et de rapport $k_1=-2$.
- La similitude de centre F et d'angle $\alpha_2=0$ qui est l'homothétie h_2 de centre F et de rapport $k_1=2$.