Exercice corrigé

Enoncé (Exercice 5 Bac 2008 Sc)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC direct de coté a, $(a > 0)$.
Soient D et E les images respectives de A et B par la symétrie de centre C. Soit I le milieu du segment $[BC]$.

1. Faire une figure (qui sera complétée au fur et à mesure) illustrant les données précédentes.

2.a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 de centre B et qui transforme D en A.

b) Déterminer l'angle et le rapport de s_1.

c) Soit M un point de la droite (DE) distinct de D et de E. Déterminer le lieu géométrique du point M' image de M par s_1. Construire M' à partir d'une position donnée de M sur (DE) puis démontrer que les points M', M, B et E sont cocycliques quelque soit la position de M sur (DE).

3. Soit s_2 la similitude directe qui transforme I en B et E en D.

a) Déterminer l'angle et le rapport de s_2.

b) Déterminer le centre de s_2.

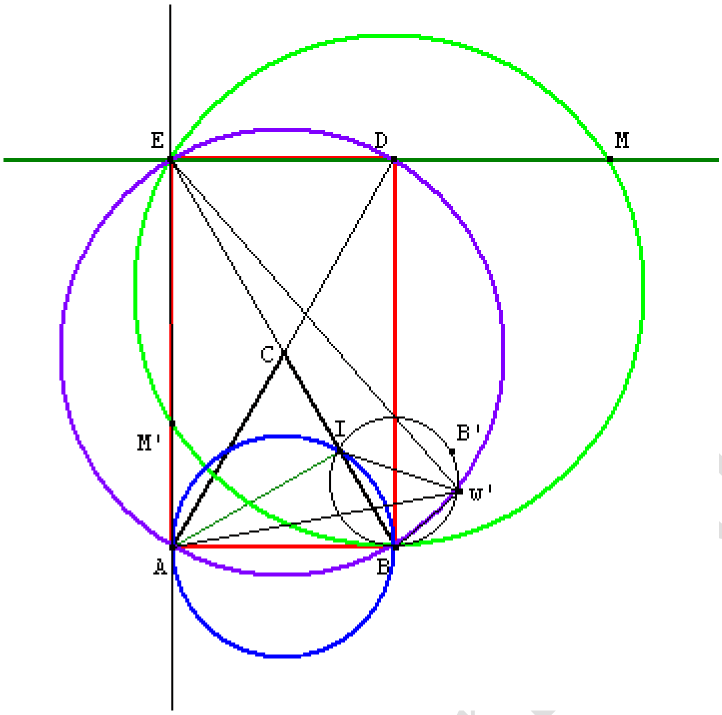
4. On pose $f = s_1 \circ s_2$.

a) Montrer que f est une similitude directe puis donner son angle et son rapport.

b) Montrer que le centre de f est le point d'intersection du cercle de diamètre $[BE]$ avec un deuxième cercle Γ que l'on déterminera. Construire ce centre.

Corrigé

1) **Figure**



2.a) Comme $BD \neq 0$ et $BA \neq 0$, donc il existe une unique similitude s_1 qui transforme B en B et D en A.

b) On a

$$\begin{array}{c} s_1 \\ B \longrightarrow B \\ D \longrightarrow A \end{array}$$

Alors l'angle de s_1 est $\theta_1 = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})\ [2\pi]$. Donc $\theta_1 = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Le rapport de s_1 est : $\lambda_1 = \frac{BA}{BD} = \tan\frac{\pi}{6}$. Donc $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) La similitude directe transforme une droite en une droite.

On a $s_1(D) = A$. Alors l'image de la droite (DE) par s_1 est la droite passant par A et perpendiculaire à (DE). Soit (AE).

Alors, lorsque M décrit la droite (DE) privée de D et de E, le point M' image de M par s_1 décrit la droite (AE) privée de A et E' tel que $E' = s_1(E)$ est l'intersection de la perpendiculaire à (BE) passant par B avec (AE).

Conclusion : Le lieu géométrique du point M' est la droite (AE) privée de A et E'.

Pour construire M' à partir d'une position donnée de M sur (DE) on sait que M' est situé sur (AE). D'autre part on sait que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Alors M' est l'intersection de la perpendiculaire à (BM) passant par B avec (AE).

Pour démontrer la cocyclicité des points M', M, B et E quelque soit la position de M sur (DE), on a :

$$(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EM'}) = (\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Alors $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}) = (\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EM'})\ [\pi]$

Les points B,M et M' ne sont pas alignés, donc B,M, M' et E sont cocycliques quelque soit la position de M sur (DE).

3. Soit s_2 la similitude directe qui transforme I en B et E en D.

a) On a :

$$\begin{array}{c} s_2 \\ I \longrightarrow B \\ E \longrightarrow D \end{array}$$

Alors l'angle de s_2 est $\theta_2 = (\overrightarrow{IE},\overrightarrow{BD})\ [2\pi]$.

Donc $\theta_2 = (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Le rapport de s_2 est : $\lambda_2 = \frac{BD}{IE} = \frac{BD}{\frac{3}{4}BE} = \frac{4}{3}\frac{BD}{BE} = \frac{4}{3}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\lambda_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) Soit Ω le centre de s_2. Pour déterminer Ω :

<u>Méthode 1 :</u>

On a

$$\left|\begin{array}{c} s_2 \\ I \longrightarrow B \\ E \longrightarrow D \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{l} (\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega B}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi] \\ (\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega D}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{array}\right.$$

D'autre part on sait que :

$$\left\langle\begin{array}{l} (\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi] \\ (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi] \end{array}\right.$$

Alors on obtient :

$$\left\langle\begin{array}{l} (\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB})[2\pi] \\ (\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega D}) = (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD})[2\pi] \end{array}\right.$$

Alors les points Ω, A, B et I d'une part ; et les points Ω, E, D et B sont cocycliques.

D'où Ω est situé sur les cercles circonscrits aux triangles ABI et BDE. Ces cercles se coupent en A et B. Comme $s_2(I) = B$; le centre est distinct de B. Alors le centre est le point A.

Méthode 2 :

Le point Ω est l'unique qui vérifie :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega B}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi] \\ \frac{\Omega B}{\Omega I} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Comme le point A vérifie :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi] \\ \frac{AB}{AI} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Donc $\Omega = A$

4) On a $f = s_1 \circ s_2$.

b) f est une similitude directe car la composée de deux similitude directe.

- **L'angle de f est la somme des angles de s_1 et s_2 :**

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

- **Le rapport de f est le produit des rapports de s_1 et s_2 :**

$$\lambda = \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}.$$

b) On a :

$$\begin{array}{c} I \xrightarrow{s_2} B \\ E \longrightarrow D \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} B \xrightarrow{s_1} B \\ D \longrightarrow A \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{c} I \xrightarrow{s_1 \circ s_2} B \\ E \longrightarrow A \end{array}$$

Soit Ω' le centre de f. Alors :

$$f(E) = A \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega' E},\overrightarrow{\Omega' A}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega' E},\overrightarrow{\Omega' A}) = (\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA})[2\pi]$$

D'où les points Ω',A,E et B sont cocycliques. Comme le triangle ABE est rectangle en A, le centre Ω' de f appartient au cercle de diamètre $[BE]$.

D'autre part, $f(I) = B \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega' I},\overrightarrow{\Omega' B}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Alors Ω' est situé sur un arc de cercle d'extrémités I et B. Ce cercle est circonscrit au triangle IBB' où B' est tel que le triangle IBB' soit équilatéral direct.

Comme $s_2(I) = B$; le centre est distinct de B. Alors le centre Ω' est le point d'intersection des cercles ainsi définis autre que B.