Baccalauréat 2016
Session Complémentaire

Série : Sciences de la Nature
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

Exercice 1 (3 points)

Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La suite de terme général $\left(\frac{e}{4}\right)^n$ est	décroissante	croissante	divergente	(0,5)
2	Si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\|u_n-3\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	(0,5)
3	Si $s = 1+2+2^2+\cdots+2^{2015}$ alors :	$s = 2^{2015}+1$	$s = 1-2^{2016}$	$s = 2^{2016}-1$	(0,5)
4	Si (v_n) est une suite arithmétique de raison r telle que $v_3 = 0$ et $v_5 = -6$ alors :	$\begin{cases} r=-3 \\ v_0 = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} r=-2 \\ v_0 = -9 \end{cases}$	$\begin{cases} r=-3 \\ v_0 = 9 \end{cases}$	(0,5)
5	Toute suite croissante et majorée est :	non bornée	convergente	divergente	(0,5)
6	Soit (w_n) une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $0 \leq w_n \leq \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$ alors :	$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$	(0,5)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1. On pose $P(z) = z^3 - 7z^2 + 18z - 12$ où z est un nombre complexe.
   a) Calculer $P(1)$. (0,5 pt)
   b) Déterminer deux réels a et b tels que : $P(z) = (z-1)(z^2+az+b)$. (0,5 pt)
   c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $P(z) = 0$. (0,5 pt)

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 3 + i\sqrt{3}$.
   a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_A, z_B et z_C. (0,5 pt)
   b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. (0,5 pt)

3.a) Calculer le module du complexe suivant : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. (0,5 pt)
b) En déduire la nature du triangle ABC. (0,5 pt)

4.a) Déterminer z_D affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer D. (0,5 pt)
b) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que

$$\left|\frac{z-1-2i\sqrt{3}}{z-1}\right| = 1.$$ (0,5 pt)

c) Déterminer z_I affixe du point I milieu de $[AD]$. Déterminer la nature du triangle IBC (0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=xe^x-e^x+x-1$.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Calculer et interpréter $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)$. (0,5 pt)

b) En remarquant que $f(x)=(x-1)(e^x+1)$ calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (0,5 pt)

c) Déterminer et interpréter $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. (0,5 pt)

2.a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ où f' et f'' sont respectivement la dérivée et la dérivée seconde de f. (0,5 pt)

b) Calculer $f'(-1)$ et préciser son signe. (0,5 pt)

c) Etudier les variations de f' et en déduire le signe de $f'(x)$. (0,5 pt)

3. Dresser le tableau de variation f. (0,5 pt)

4. Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées puis la construire. (0,5 pt)

5.a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)=f'(x)-e^x+x-2$. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

b) Calculer l'aire S du domaine plan délimité par la courbe (C) et les axes de coordonnées. (0,5 pt)

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-2-\ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (1 pt)

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$. (0,75 pt)

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. (0,75 pt)

3. Donner une équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse $x_0=e$. (0,5 pt)

4.a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β $(\alpha<\beta)$ et que $0,1<\alpha<0,2$; $3,1<\beta<3,2$. Démontrer que : $\frac{e^\alpha}{e^\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$. (1 pt)

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$. (0,5 pt)

5. Soit g la restriction de f sur $I=[1;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5 pt)

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(e-3)$, (On pourra utiliser la question 3) (0,5 pt)

6. Tracer (C) et (C') courbes respectives des fonctions f et g^{-1} dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,5 pt)

7.a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_1^e \ln x\,dx$. (0,5 pt)

b) Calculer l'aire du domine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. (0,5 pt)

Fin.

Correction Bac 2016
Session Complementaire

* EXERCICE 01

Question n°	1	2	3	4	5	6
Reponse	A	B	C	C	B	C

* Exercice 02

1) $P(z) = z^3 - 7z^2 + 18z - 12$

a) Calculons $P(1)$

$P(1) = 1 - 7 + 18 - 12 = 0$

b) Déterminons les reels a et b tels que $P(z) = (z-1)[z^2 + az + b]$

En faisant le Tableau de Hörner on obtient :

	1	−7	18	−12
1	↓	1	−6	12
	1	−6	12	0
		a	b	

$P(z) = (z-1)(z^2 - 6z + 12)$

c) Resoudre $P(z) = 0$

$(z-1)(z^2 - 6z + 12) = 0$

$z - 1 = 0$ ou $z^2 - 6z + 12 = 0$

$z = 1$

$\Delta = 36 - 48 = -12$

$\Delta = (2i\sqrt{3})^2$

$z_1 = \dfrac{6 + 2i\sqrt{3}}{2} = 3 + i\sqrt{3}$

$z_2 = \dfrac{6 - 2i\sqrt{3}}{2} = 3 - i\sqrt{3}$

$S = \{1 ; 3 - i\sqrt{3} ; 3 + i\sqrt{3}\}$

2) on pose $z_A = 1$ $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

(a) Determinons le module et un argument de z_A ; z_B et z_C

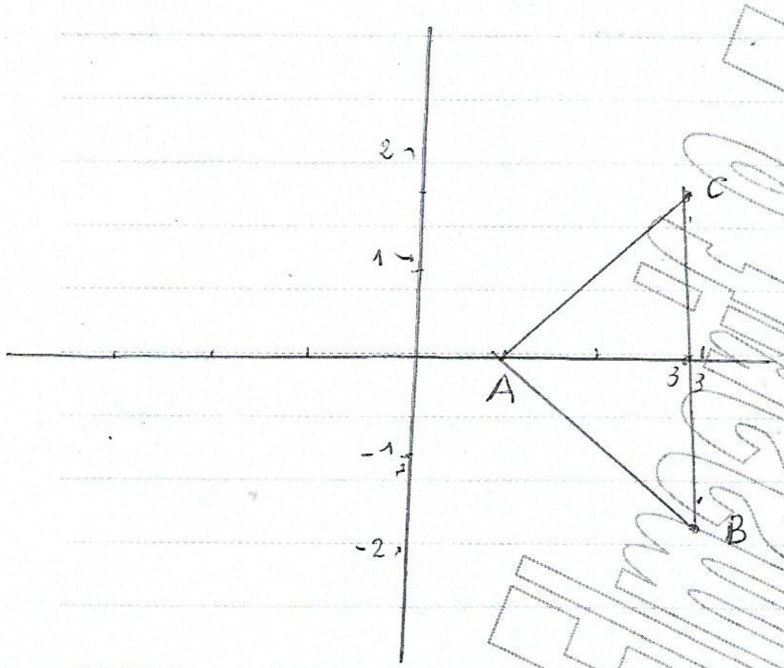
* Pour $z_A = 1$

$z_A = [1, 0]$

* Pour $z_B = [2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}]$

Pour $z_C = [2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}]$

b) Plaçons les points A; B et C



3) a) Calculons le module de: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|\frac{3+i\sqrt{3}-1}{3-i\sqrt{3}-1}\right| = \left|\frac{2+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}\right| = 1$$

b) Deduisons la nature de Triangle ABC

Comme $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_C - z_A| = |z_B - z_A|$

$\Leftrightarrow AC = AB$

donc (ABC) est isocele en A

4) a) Determinons z_D

(ABCD) parallelogramme $\Leftrightarrow \vec{CD} = \vec{BA}$

$\Leftrightarrow z_D - z_C = z_A - z_B$

$\Leftrightarrow z_D = z_A - z_B + z_C$

$\Leftrightarrow z_D = 1 - 3 + i\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3} = 1 + 2i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z_D = 1 + 2i\sqrt{3}$

b) Determinons Γ

$M \in \Gamma \Leftrightarrow \left|\frac{z - 1 - 2i\sqrt{3}}{z - 1}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z - z_D}{z - z_A}\right| = 1$

$\Leftrightarrow AM = DM$

$\Leftrightarrow \Gamma$ decrit la mediatrice du segment [AD]

c) Determinons z_I

$I = \text{milieu } [AD] \Leftrightarrow z_I = \frac{z_A + z_D}{2}$

$\Leftrightarrow z_I = \frac{1 + 1 + 2i\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow z_I = 1 + i\sqrt{3}$

Determinons la nature de (IBC)

$\frac{z_B - z_C}{z_I - z_C} = \frac{3 - i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}} = \frac{-2i\sqrt{3}}{-2} = i\sqrt{3}$ imag

(IBC) est rectangle en C

Exercice 03

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = xe^x - e^x + x - 1$

de courbe $\mathcal{C}$

1) ⓐ Calculons

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} [\underbrace{xe^x}_{0} - \underbrace{e^x}_{0} + x - 1] = -\infty$

• $\lim\limits_{-\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{-\infty} [\underbrace{xe^x}_{0} - \underbrace{e^x}_{0}] = 0$

• Interprétation :

La courbe $\mathcal{C}$ de f admet la droite d'equation $y = x - 1$ comme Asymptote oblique au voisinage de $-\infty$

b) Calculons

• $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} (x-1)(e^x + 1) = +\infty$

c) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \left[\underbrace{\dfrac{x-1}{x}}_{1} \cdot \underbrace{(e^x + 1)}_{+\infty}\right] = +\infty$

• Interpretation

La courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$

2) ⓐ Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$

• $f'(x) = e^x + xe^x - e^x + 1$

$f'(x) = xe^x + 1$

• $f''(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

b) Calculons $f'(-1)$

$f'(-1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} > 0$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

or $f'(-1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$

③ Dressons le T.V de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Déterminons les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées

* $\mathcal{C} \cap ox \Rightarrow f(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(e^x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ ou $e^x+1=0$ impossible

$\Leftrightarrow x=1$

$A(1,0)$

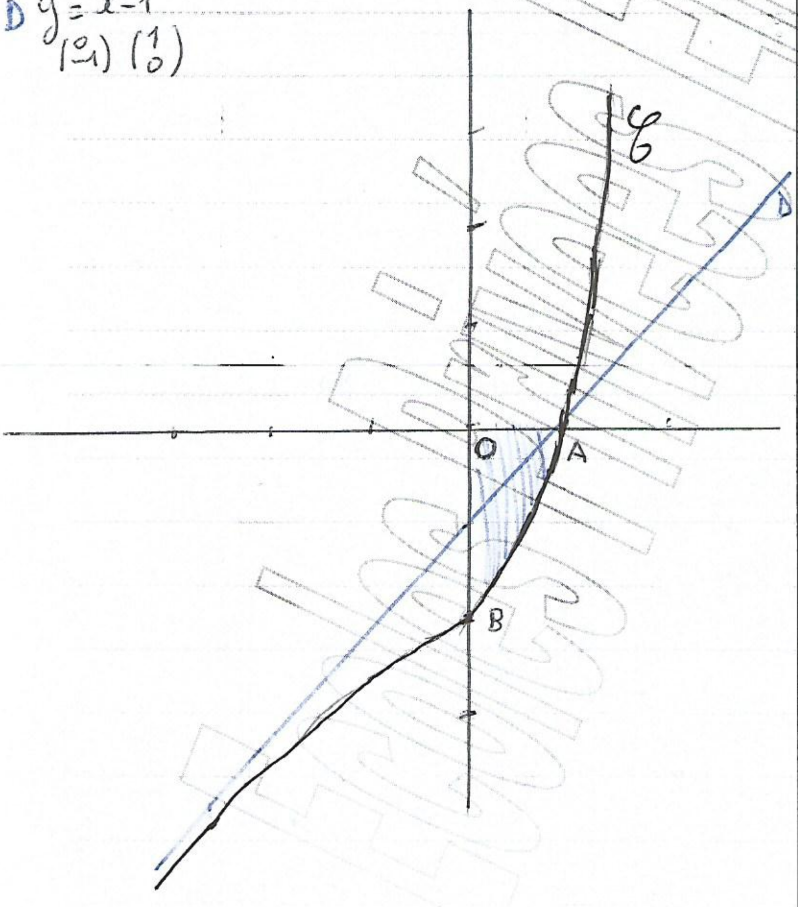
* $\mathcal{C} \cap oy \Rightarrow f(0) = -2$

$B(0,-2)$

Tracé de $\mathcal{C}$

D $y = x-1$

$\binom{0}{-1}$ $\binom{1}{0}$



5) a) Vérifions que $f(x) = f'(x) - e^x + x - 2$

$f'(x) - e^x + x - 2 = xe^x + 1 - e^x + x - 2$

$= xe^x + x + x - 1 = f(x)$

Déduisons une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = f'(x) - e^x + x - 2$

donc

$F(x) = f(x) - e^x + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$F(x) = xe^x - e^x + x - 1 - e^x + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1 - 2e^x + xe^x$

b) Calcul de l'aire S

$$S = -\int_0^1 f(x)dx = -\left[F(x)\right]_0^1$$

$$= -\left[\frac{1}{2}x^2 - x - 1 - 2e^x + xe^x\right]_0^1$$

$$S = \left[-\frac{1}{2}x^2 + x + 1 + 2e^x - xe^x\right]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1 + 1 + 2e - e\right) - (1+2)$$

$$S = e + \frac{3}{2} - 3$$

$$S = e - \frac{3}{2} = \frac{2e-3}{2} \text{ cm}^2$$

Exercice 04

$\forall x > 0 \quad f(x) = x - 2 - \ln x$

1) a) Calculons

- $\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} [x - 2 - \ln x] = +\infty$

- $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ F.I

$f(x) = x\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} x\left(1 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty$.

b) Calculons

- $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \left[\frac{x - 2 - \ln x}{x}\right]$

$= \lim\limits_{+\infty} \left[1 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right] = 1$

- $\lim\limits_{+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{+\infty} [-2 - \ln x] = -\infty$.

Interpretation :

la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction la droite $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

2) Calculons $f'(x)$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Dressons le T.V de f

$f'(x) = 0 \iff x - 1 = 0$

$\iff x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 1 - 2 - \ln 1 = -1$

3) Donnons une equation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en $x_0 = e$.

$T : y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$f'(e) = \frac{e-1}{e}$ | $f(e) = e - 2 - \ln e$
$= e - 3$

$T : y = \left(\frac{e-1}{e}\right)x - e + 1 + e - 3$

$T : y = \left(\frac{e-1}{e}\right)x - 2$

4) a) Montrons que $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β

Comme $f(x)$ est continue et change deux fois de signe alors l'equation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β $(\alpha < \beta)$

- $f(0{,}1) = 0{,}4$
$f(0{,}2) = -1{,}3$ $\Rightarrow 0{,}1 < \alpha < 0{,}2$

- $f(3.1) = -0{,}03$
$f(3.2) = 0{,}04$ $\quad 3{,}1 < \beta < 3{,}2$

Montrons que : $\frac{e^\alpha}{e^\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

$f(\alpha) = f(\beta) = 0$

$\alpha - 2 - \ln\alpha = \beta - 2 - \ln\beta$

$\alpha - \ln\alpha = \beta - \ln\beta$

$\alpha - \beta = \ln\alpha - \ln\beta$

$\alpha - \beta = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$

$e^{\alpha-\beta} = e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ $\quad \boxed{e^{\ln x} = x}$

$e^{\alpha-\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

$\frac{e^\alpha}{e^\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

b) Deduisons le signe de $f(x)$

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

5) soit g la restriction de f sur $[1,+\infty[$

$\forall x \in [1,+\infty[\quad g(x) = f(x)$

(a) Montrons que g est bijective.

Puisque $g = f$ sur $[1,+\infty[$ est continue et croissante alors g realise une bijection de $I = [1,+\infty[$ vers $J = [-1,+\infty[$

(b) Calculons $(g^{-1})'(e-3)$

$f(e) = g(e) = e - 3 \Rightarrow g^{-1}(e-3) = e$

$\cancel{(g^{-1})'(e-3)}$

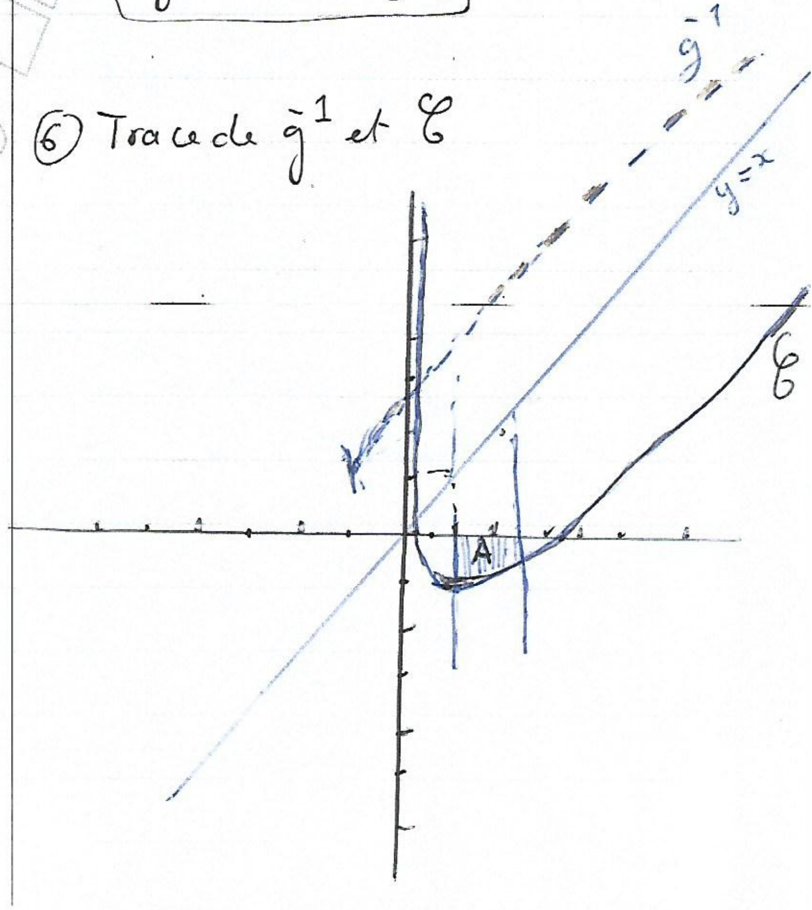
$(g^{-1})'(e-3) = \frac{1}{g'[g^{-1}(e-3)]}$

$= \frac{1}{g'(e)} = \frac{1}{f'(e)}$

$= \frac{1}{\frac{e-1}{e}} = \frac{e}{e-1}$

$\boxed{(g^{-1})'(e-3) = \frac{e}{e-1}}$

(6) Trace de g^{-1} et $\mathscr{C}$



7) a) Calculons : $\int_1^e \ln x \, dx$

$\int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx = \int_1^e u'v$

on pose $u'(x) = 1 \longrightarrow u(x) = x$

$v(x) = \ln x \longrightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

$\int_1^e \ln x \, dx = [uv] - \int uv'$

$= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \cdot dx$

$= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e$

$= [x \ln x - x]_1^e$

$= (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)$

$\int_1^e \ln x \, dx = 1$

b) Calculons l'aire A limitée par C, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e$

$A = -\int_1^e f(x) dx = -\int_1^e (x - 2 - \ln x) dx$

$A = \int_1^e (-x + 2 + \ln x) dx$

$= \int_1^e (-x+2) dx + \int_1^e \ln x \, dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^e + 1$

$A = \left(-\frac{1}{2}e^2 + 2e\right) - \left(-\frac{1}{2} + 2\right) + 1$

$A = -\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{3}{2} + 1$

$A = 2e - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$

$A = 5,4 - 4,1 = 1,3 \ uA$

$A = 1,3 \ uA$