République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2016
Session Normale

Série : Sciences de la Nature
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

Exercice 1 (3 points)

Des études statistiques sur les examens de fin d'année universitaire ont montré que : 10% d'une population estudiantine donnée possède un ordinateur.
La probabilité qu'un étudiant possédant un ordinateur réussisse est de 0,8.
La probabilité qu'un étudiant ne possédant pas un ordinateur réussisse est de 0,3.
On choisit au hasard un étudiant dans cette population. On note M l'évènement « l'étudiant choisi possède un ordinateur» et R l'évènement «l'étudiant choisi réussit ».
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $p(M)$ est :	0.6	0.9	0.1	(0,5pt)
2	La probabilité $p_M(R)$ est :	0.8	0.9	0.7	(0,5pt)
3	La probabilité $p(M\cap R)$ est :	0.09	0.08	0.07	(0,5pt)
4	La probabilité $p(\overline{M}\cap R)$ est :	0.27	0.29	0.31	(0,5pt)
5	La probabilité $p(R)$ est :	0.25	0.35	0.45	(0,5pt)
6	La probabilité $p_R(M)$ est :	$\frac{13}{35}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{8}{35}$	(0,5pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-7z^2+19z-13$.
a) Calculer $P(1)$. (0,5 pt)
b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$. (0,5 pt)
c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z)=0$. On note z_0 ; z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que : $Im(z_1)<Im(z_0)<Im(z_2)$. (0,5 pt)

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1, z_B=z_1-i$ et $z_C=z_2+1$.
a) Vérifier que $z_B=3-3i$ et que $z_C=4+2i$ puis placer les points A, B et C dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. (0,5 pt)
b) Déterminer la nature du triangle ABC. (0,5 pt)
c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. (0,5 pt)

3) Pour tout nombre $z\neq 3-3i$; on pose : $f(z)=\dfrac{z-4-2i}{z-3+3i}$.
a) Vérifier que $f(z_D)=-i$ et interpréter graphiquement. (0,25 pt)
b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$. (0,5 pt)
c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. (0,5 pt)
d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{2}$. (0,5 pt)
e) Vérifier que les trois ensembles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 passe par les points A et D. (0,25 pt)

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-1+\dfrac{x}{e^x}=x-1+xe^{-x}$.
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-x+e^x$.
a) Calculer $g'(x)$ où g' est la dérivée de g. (0,5 pt)

b) Etudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2.a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement. (0,5 pt) (0,5 pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) et étudier la position relative de (C) et (Δ). (0,75 pt)

3.a) Calculer la dérivée $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$. (0,5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. (0,25 pt)

4.a) Déterminer le point A de (C) où la tangente T à la courbe (C) est parallèle à l'asymptote (Δ). Donner une équation de T. (0,5pt)

b) Tracer T, (Δ) et (C). (0,5 pt)

5) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = -(x+1)e^{-x}$.

a) Vérifier que $H'(x) = f(x) - x + 1$. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt)

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$. (0,5 pt)

Exercice 4 (7 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 2 + 4\ln x$.

1.a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. (0,5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de g. (0,5 pt)

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,25 pt)

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Vérifier que $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$. (0,5 pt)

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$. (0,25 pt)

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{2\ln x}{x^2}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter graphiquement. (0,5 pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - (x-1)\right)$. En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation. (0,5 pt)

c) Etudier la position relative de (C) et Δ. (0,5 pt)

2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$. (0,5 pt)

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2}{2\alpha^2}$. (0,25 pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,25 pt)

3.a) Donner l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 1. Vérifier que T est perpendiculaire à Δ. (0,5 pt)

b) Montrer que la courbe (C) coupe (Ox) en un point B autre que A d'abscisse β telle que $1{,}3 < \beta < 1{,}4$. (0,5 pt)

c) Représenter la courbe (C) et les droites Δ et (T) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,5 pt)

d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $2x^3 - (m+1)x^2 - 2\ln x = 0$. (0,5 pt)

4) Soit S l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x = 1$ et $x = \beta$.

a) Justifier que : $S = -\int_1^\beta f(x)dx$. (0,25 pt)

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $I = \int_1^\beta \frac{\ln x}{x^2}dx$. Calculer S en fonction de β. (0,25 pt)

Fin.

Exercice 1 :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	C	A	B	A	B	C

Exercice 2 :

1) $P(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$

a) $P(1) = 1 - 7 + 19 - 13 = 20 - 20 = 0$

$\therefore P(1) = 0$

b)

	1	−7	19	−13
1		1	−6	13
	1	−6	13	0

$\therefore \forall z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z-1)(z^2 - 6z + 13)$

c) $P(z) = 0 \iff (z-1)(z^2-6z+13) = 0$

$\iff z - 1 = 0$ ou $z^2 - 6z + 13 = 0$

$\iff z = 1$ ou $z^2 - 6z + 13 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4\times1\times13 = 36 - 52 = -16$

$= 16i^2 = (4i)^2$

$z' = \frac{6+4i}{2\times1} = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$

$z'' = \frac{6-4i}{2\times1} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$

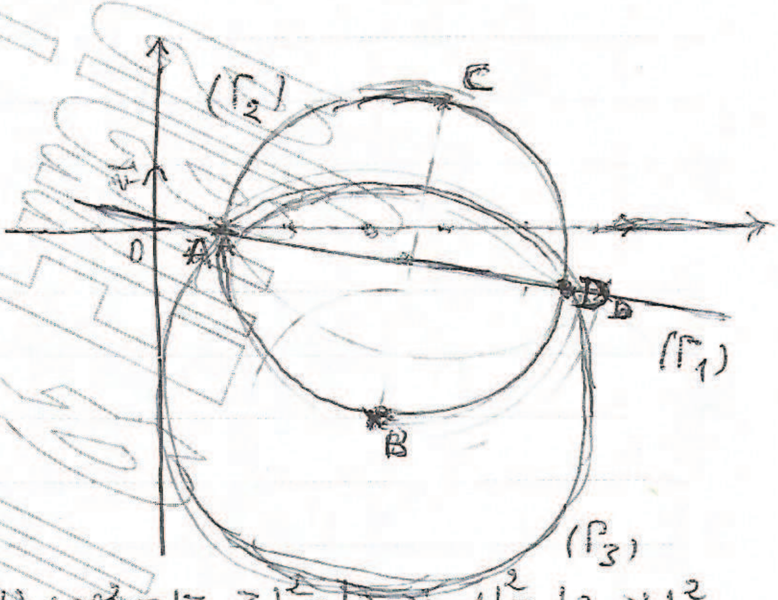
$S = \{1, 3+2i, 3-2i\}$

$Im(3-2i) < Im(1) < Im(3+2i)$

$\therefore z_1 = 3-2i,\ z_0 = 1$ et $z_2 = 3+2i$

2. a) $* z_B = z_1 - i = 3 - 2i - i \quad \therefore z_B = 3-3i$

$* z_C = z_2 + 1 = 3+2i+1 \quad \therefore z_C = 4+2i$



b) $* AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |3-3i-1|^2 = |2-3i|^2$

$= (2)^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$

$* AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |4+2i-1|^2 = |3+2i|^2$

$= (3)^2 + (2)^2 = 9 + 4 = 13$

$* BC^2 = |z_C - z_B|^2 = |4+2i-3+3i|^2 = |1+5i|^2$

$= (1)^2 + (5)^2 = 1 + 25 = 26$

Donc $AB = AC$ et $AB^2 + AC^2 = BC^2$

d'où ABC est isocèle et rectangle en A.

c) $ABDC\ \# \iff \vec{CD} = \vec{AB} \iff z_D - z_C = z_B - z_A$

$\iff z_D = z_B - z_A + z_C \iff z_D = 3 - 3i - 1 + 4 + 2i$

$\iff z_D = 6 - i$

3) $\forall z \neq 3-3i,\ f(z) = \frac{z-4-2i}{z-3+3i}$

a) $f(z_D) = \frac{6-i-4-2i}{6-i-3+3i} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{-3i-2i^2}{3+2i}$

$= \frac{-i(3+2i)}{(3+2i)} = -i \quad \therefore f(z_D) = -i$

$\therefore \left|\frac{z_D - z_C}{z_D - z_B}\right| = |-i|$ et $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_B}\right) = \arg(-i)\ [2\pi]$

$\therefore \frac{CD}{BD} = 1$ et $(\vec{BD}, \vec{CD}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\therefore$ DBC est isocèle et rectangle en D (indirect)

Exercice 2 (suite)

3) (suite)

b) $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_C}{z-z_B}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \frac{CM}{BM} = 1 \Leftrightarrow CM = BM$

$\therefore \Gamma_1$ est la médiatrice du segment $[BC]$

(voir figure).

c) $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg[f(z)] = \frac{\pi}{2}[\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left[\frac{z-z_C}{z-z_B}\right] = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\vec{BM}, \vec{CM}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

$\therefore \Gamma_2$ est le cercle de diamètre $[BC]$ privé de B et C. (voir figure).

d) $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow |f(z) - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{z-4-2i}{z-3+3i} - 1\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z-4-2i-z+3-3i}{z-3+3i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-1-5i|}{|z-3+3i|} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{26}}{|z-z_B|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z-z_B| \times \sqrt{2} = \sqrt{26}$

$\Leftrightarrow |z-z_B| = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z-z_B| = \sqrt{13}$

$\Leftrightarrow BM = \sqrt{13}$

$\therefore \Gamma_3$ est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{13}$.

(voir figure).

e) * Nous avons vérifié en 3-a) que $f(z_D) = -i$

D'autre part : $f(z_A) = \frac{z_A-4-2i}{z_A-3+3i} = \frac{1-4-2i}{1-3+3i}$

$= \frac{-3-2i}{-2+3i} = \frac{-2i+3i^2}{-2+3i} = \frac{i(-2+3i)}{(-2+3i)} = i$.

Et comme $f(z_A) = i$ et $f(z_D) = -i$

on a donc :

* $|f(z_A)| = |f(z_D)| = 1$ d'où $A \in \Gamma_1$ et $D \in \Gamma_1$
* $f(z_A) \in i\mathbb{R}^*$ et $f(z_D) \in i\mathbb{R}^*$ d'où $A \in \Gamma_2$ et $D \in \Gamma_2$
* $|f(z_A) - 1| = |i - 1| = \sqrt{2}$ et $|f(z_D) - 1| = |-i-1| = \sqrt{2}$ d'où $A \in \Gamma_3$ et $D \in \Gamma_3$.

Exercice 3

1. a) $g(x) = 1 - x + e^x$

$\therefore g'(x) = -1 + e^x$

b) * $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x + e^x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x + e^x)$ F.I.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x + e^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$

* $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$g(0) = 2$

T.V. de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Comme le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est $2 > 0$ donc $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	

2. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1 + xe^{-x}) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1+xe^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + e^{-x}\right) = +\infty$

$\therefore (C)$ admet une B.P. // (Oy) au voisinage de $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - 1 + \frac{x}{e^x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\cancel{x} - \cancel{1} + \frac{x}{e^x} - \cancel{x} + \cancel{1}\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ d'où la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une A.O. à (C) au voisinage de $+\infty$

* $f(x) - (x-1) = xe^{-x}$

$\therefore$ Le signe de $f(x) - (x-1)$ est celui de x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - (x-1)$		$-$	0	$+$	
P.R. de (C) et (Δ)		Δ / C	$P.C$	C / Δ	

Exercice 3 (suite)

3. a) $f(x) = x - 1 + xe^{-x}$

$\therefore f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x}$

$= \frac{1-x+e^x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) T.V. de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4. a) $T \parallel \Delta \iff$ le coefficient directeur de T est égal à $1 \iff f'(x) = 1$

$\iff \frac{1-x+e^x}{e^x} = 1 \iff 1-x+e^x = e^x \iff x = 1$

$f(1) = \frac{1}{e}$ $\therefore A(1, \frac{1}{e})$

$T : y = f'(1).(x-1) + f(1)$

$\iff T : y = x - 1 + \frac{1}{e}$

b) $* \ \Delta : y = x - 1$

x	0	1
y	-1	0

$* \ T : y = x - 1 + \frac{1}{e}$

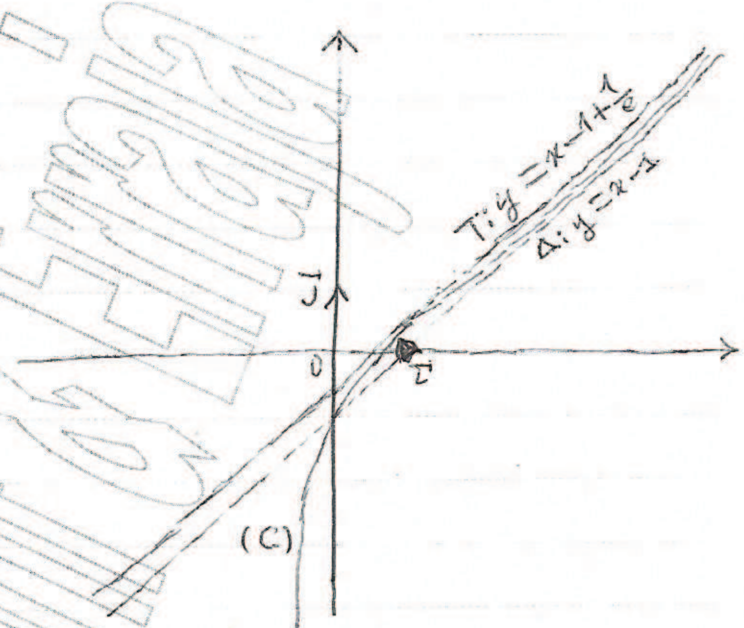
x	1	0
y	$\frac{1}{e}$	$-1+\frac{1}{e}$

$* \ (C) \cap (Oy) : (0, f(0)) = (0, -1)$

$* \ (C) \cap (Ox) : f(x) = 0$

Comme f est continue, strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et comme elle change de signe donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

Et comme $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = \frac{1}{e} > 0$ donc $0 < \alpha < 1$



5. a) $H(x) = -(x+1)e^{-x}$

$\therefore H'(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$

D'autre part : $f(x) - x + 1 = x - 1 + xe^{-x} - x + 1 = xe^{-x}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = f(x) - x + 1$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = H'(x) + x - 1$

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est

$F(x) = H(x) + \frac{x^2}{2} - x = -(x+1)e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x$

b) L'aire en u.a. du domaine plan limité par (C), (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ est :

$\int_1^3 |f(x) - (x-1)| dx = \int_1^3 |H'(x)| dx = \int_1^3 H'(x) dx$

$= [H(x)]_1^3 = H(3) - H(1) = (-4e^{-3} + 2e^{-1})$ u.a.

Exercice 4

Partie A

1. a) $g(x) = x^3 - 2 + 4\ln x \; ; \; x \in]0, +\infty[$

$\therefore g'(x) = 3x^2 + \frac{4}{x} > 0, \forall x \in]0, +\infty[$

d'où g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) $* \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^3 - 2 + 4\ln x) = -\infty$

$* \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2 + 4\ln x) = +\infty$

T.V. de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) Comme g est continue et strictement monotone sur l'intervalle $]0, +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur l'intervalle $J = g(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

b) Comme g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

Et comme $1,1 \in]0, +\infty[$ et $1,2 \in]0, +\infty[$

et $g(1,1) = (1,1)^3 - 2 + 4\ln(1,1) \simeq -0,29 < 0$

et $g(1,2) = (1,2)^3 - 2 + 4\ln(1,2) \simeq 0,46 > 0$

donc $1,1 < \alpha < 1,2$.

c)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

Partie B

1. a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x - 1 - \frac{2\ln x}{x^2}\right) = +\infty$

$\therefore x = 0$: A.V. à (C).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x-1) - \left(\frac{2\ln x}{x^2}\right)\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{2\ln x}{x^2}\right) = 0$

donc la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une A.O. à (C) au voisinage de $+\infty$.

c)

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - (x-1)$	||	$+$	0	$-$	
P.R. de (C) et Δ	||	$(C) / \Delta$	P.C $(1,0)$	$\Delta / (C)$	

2. a) $f(x) = x - 1 - \frac{2\ln x}{x^2}$

$\therefore f'(x) = 1 - \frac{\frac{2}{x}(x^2) - 4x\ln x}{x^4}$

$= 1 - \frac{2x - 4x\ln x}{x^4}$

$= 1 - \frac{2x(1 - 2\ln x)}{x \cdot x^3}$

$= 1 - \frac{2 - 4\ln x}{x^3}$

$= \frac{x^3 - 2 + 4\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$

$\therefore \forall x \in]0, +\infty[, \; f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b) $g(\alpha) = 0 \iff \alpha^3 - 2 + 4\ln\alpha = 0$

$\iff 4\ln\alpha = 2 - \alpha^3 \iff \ln\alpha = \frac{2 - \alpha^3}{4}$

$f(\alpha) = \alpha - 1 - \frac{2\ln\alpha}{\alpha^2} = \alpha - 1 - \frac{2\left(\frac{2 - \alpha^3}{4}\right)}{\alpha^2}$

$= \alpha - 1 - \frac{2 - \alpha^3}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha^2(\alpha - 1) - (2 - \alpha^3)}{2\alpha^2}$

$= \frac{2\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2 + \alpha^3}{2\alpha^2} = \frac{3\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2}{2\alpha^2}$

c) Le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$ est celui de $g(x)$ et $f'(x) = 0 \iff x = \alpha$

T.V. de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 4 (suite)

3. ~~(suite)~~ a) $T : y = -x+1$ et $\Delta : y = x-1$

or : $1\times(-1) = -1$ d'où $T \perp \Delta$.

b) Comme f est continue, strictement monotone et elle change de signe sur chacun des intervalles $]0, \alpha]$ et $]\alpha, +\infty[$ (car $f(\alpha) < f(1) = 0$), l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, \alpha]$ une unique solution $\gamma = 1$ et dans $]\alpha, +\infty[$ une unique solution β. et comme $\alpha < 1{,}3$

et $f(1{,}3) = 1{,}3 - 1 - \frac{2\ln(1{,}3)}{(1{,}3)^2} \simeq -0{,}0130$

et $f(1{,}4) = 1{,}4 - 1 - \frac{2\ln(1{,}4)}{(1{,}4)^2} \simeq 0{,}0670$

donc $1{,}3 < \beta < 1{,}4$.

La courbe (C) coupe donc l'axe des abscisses au point A d'abscisse 1 et en un second point B d'abscisse β telle que $1{,}3 < \beta < 1{,}4$.

c) * $\Delta : y = x-1$

x	0	1
y	-1	0

* $T : y = -x+1$

x	0	1
y	1	0

* $C \cap (Oy) = \emptyset$ (car $0 \notin D_f$)

* $C \cap (Ox)$: $A(1, 0)$ et $B(\beta, 0)$

* f atteint un minimum absolu en α.

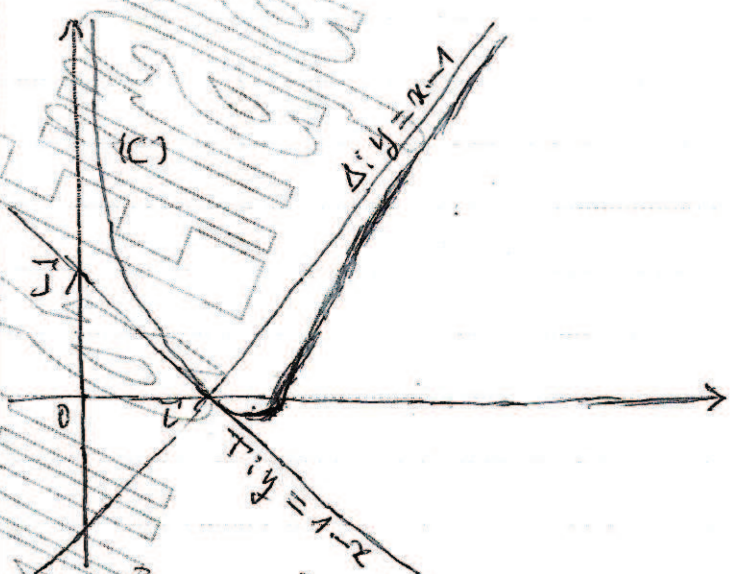
$$f(\alpha) = \frac{3\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2}{2\alpha^2} = \frac{3}{2}\alpha - 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

$1{,}15 < \alpha < 1{,}2 \Longrightarrow \frac{3}{2}\times 1{,}15 < \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}\times 1{,}2$

et $-\frac{1}{(1{,}1)^2} < -\frac{1}{\alpha^2} < -\frac{1}{(1{,}2)^2}$

donc : $\frac{3}{2}\times 1{,}1 - 1 - \frac{1}{(1{,}1)^2} < \frac{3}{2}\alpha - 1 - \frac{1}{\alpha^2} < \frac{3}{2}\times 1{,}2 - 1 - \frac{1}{(1{,}2)^2}$

d'où $-0{,}2 < f(\alpha) < -0{,}1$



d) $2x^3 - (m+1)x^2 - 2\ln x = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{2x^3 - (m+1)x^2 - 2\ln x}{x^2} = 0$

$\Longleftrightarrow 2x - (m+1) - \frac{2\ln x}{x^2} = 0$

$\Longleftrightarrow x - 1 - \frac{2\ln x}{x^2} = -x + m$

$\Longleftrightarrow f(x) = -x + m$

$(C) \cap \Delta_m$: $\Delta_m : y = -x + m$; $\Delta_m \,//\, T$

m	$-\infty$		1		$+\infty$
Nbre de soluti.		0	1	2	

4. a) $S = \int_1^\beta |f(x)|\,dx = \int_1^\beta (-f(x))\,dx = -\int_1^\beta f(x)\,dx$

(car $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [1, \beta]$)

b) Pour calculer $I = \int_1^\beta \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$, alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$

$\therefore I = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\beta + \int_1^\beta \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\beta + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\beta$

$= \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^\beta = -\frac{\ln\beta}{\beta} - \frac{1}{\beta} + 1$

$S = -\int_1^\beta \left(x - 1 - \frac{2\ln x}{x^2}\right)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_1^\beta + 2\int_1^\beta \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_1^\beta + 2I = \beta - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2} + 2I$

$= \beta - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2} + 2\left(1 - \frac{1}{\beta} - \frac{\ln\beta}{\beta}\right)$

$\therefore S = \left(\frac{3}{2} + \beta - \frac{\beta^2}{2} - \frac{2}{\beta} - \frac{2\ln\beta}{\beta}\right)$ u.a.