EXERCICE 3 : corrigé

1) Soit m un réel.

$$\begin{aligned} A \in P_m &\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2x_A + (m-1)y_A + \frac{1}{2}mz_A - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + (m-1) + \frac{1}{2}m - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 6m - 16 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $x^2+6x-16=0$ est $\Delta = 6^2 - 4\times 1\times(-16) = 100 > 0$. L'équation $x^2+6x-16=0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-6+\sqrt{100}}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-6-\sqrt{100}}{2} = -8$.

Les valeurs de m pour lesquelles le point A appartient au plan P_m sont -8 et 2.

2) P_1 est le plan d'équation $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}z - 3 = 0$ ou encore $x+2z-12=0$. P_{-4} est le plan d'équation $4x-5y-2z-3=0$.

Un vecteur normal au plan P_1 est le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(1,0,2)$ et un vecteur normal au plan P_{-4} est le vecteur $\overrightarrow{n_{-4}}$ de coordonnées $(4,-5,-2)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_{-4}}$ ne sont pas colinéaires (en analysant la deuxième coordonnée) et donc les plans P_1 et P_{-4} ne sont pas parallèles et donc les plans P_1 et P_{-4} sont sécants en une droite que l'on note (D). Vérifions que $(D) = (d)$.

Soit $M(12-2t, 9-2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (d).

$$x_M + 2z_M - 12 = (12-2t) + 2t - 12 = 0.$$

Donc, tout point M de (d) appartient au plan P_1.

$$4x_M - 5y_M - 2z_M - 3 = 4(12-2t) - 5(9-2t) - 2t - 3 = 48 - 8t - 45 + 10t - 2t - 3 = 0.$$

Donc, tout point M de (d) appartient au plan P_{-4}. Ainsi, la droite (d) est la droite d'intersection des plans P_1 et P_{-4}.

3) a) P_0 est le plan d'équation $-y-3=0$ ou encore $y+3=0$. Soit $M(12-2t, 9-2t, t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de (d).

$$M \in P_0 \Leftrightarrow y_M + 3 = 0 \Leftrightarrow 9 - 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 6.$$

Pour $t=6$, on obtient le point B de coordonnées $(0,-3,6)$.

b) Soit m un réel.

$$\frac{1}{4}m^2x_B + (m-1)y_B + \frac{1}{2}mz_B - 3 = -3(m-1) + 3m - 3 = 0.$$

Donc, le point B apprtient à tous les plans P_m, $m \in \mathbb{R}$.

c) Un point appartenant à tous les plans P_m appartient nécessairement aux plans P_0, P_1 et P_{-4} et donc au plan P_0 et à la droite (d). Un tel point est donc nécessairement le point B.

Le point B est l'unique point de l'espace appartenant à tous les plans P_m, $m\in\mathbb{R}$.

4) a) Avec les notations de la question 2),

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_{-4}} = 1\times 4 + 0\times(-5) + 2\times(-2) = 0.$$

Donc, les plans P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

b) Soient m et m' deux réels. Un vecteur normal au plan P_m (resp. $P_{m'}$) est le vecteur $\overrightarrow{n_m}$ (resp. $\overrightarrow{n_{m'}}$) de coordonnées $\left(\dfrac{m^2}{4}, (m-1), \dfrac{m}{2}\right)$ (resp. $\left(\dfrac{m'^2}{4}, (m'-1), \dfrac{m'}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} P_m \perp P_{m'} &\Leftrightarrow \overrightarrow{n_m}.\overrightarrow{n_{m'}} = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4}\frac{m'^2}{4} + (m-1)(m'-1) + \frac{m}{2}\frac{m'}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0. \end{aligned}$$

c) Cette dernière condition équivaut à $(mm')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0$ (après multiplication par 16 des deux membres de l'égalité).

L'algorithme affiche tous les couples (m,m') d'entiers relatifs compris au sens large entre -10 et 10 tels que les plans P_m et $P_{m'}$ soient perpendiculaires.

EXERCICE 2 : corrigé

Justification 1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2,-2,-2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2,-2,-2)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $-2 = 2k$ et aussi $-2 = -2k$ ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\boxed{\text{L'affirmation 1 est fausse.}}$$

Justification 2. Les points A, B et C définissent donc un unique plan et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$$\boxed{\text{L'affirmation 2 est vraie.}}$$

Justification 3. La droite (EF) est la droite passant par $E(-1,-2,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EF}(-1,-1,1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (EF) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, le plan (ABC) est le plan passant par $A(1,2,3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(0,1,-1)$. Une équation du plan (ABC) est $0 \times (x-1) + 1 \times (y-2) - 1 \times (z-3) = 0$ ou encore $y - z + 1 = 0$.

Soit $M(-1-t, -2-t, 3+t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (EF).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (-2-t) - (3+t) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Pour $t = -2$, on obtient le point de coordonnées $(1,0,1)$. Ainsi, la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le point de coordonnées $(1,0,1)$. D'autre part, le milieu du segment $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{3-1}{2}, \dfrac{0+0}{2}, \dfrac{1+1}{2}\right)$ ou encore $(1,0,1)$. La droite (EF) et le plan (ABC) sont effectivement sécants en le milieu du segment $[BC]$.

$$\boxed{\text{L'affirmation 3 est vraie.}}$$

Justification 4.

1ère solution. Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, elles sont en particulier coplanaires et on en déduit que le point B appartient au plan (ABC). Mais $y_D - z_D + 1 = 1 - (-1) + 1 = 3 \neq 0$. Donc, le point D n'appartient pas au plan (ABC) et finalement les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2ème solution. La droite (AB) est la droite passant par $A(1,2,3)$ et de vecteur directeur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

La droite (CD) est la droite passant par $C(-1,0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}(3,1,-2)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1+3u \\ y=u \\ z=1-2u \end{array}\right., \ u\in\mathbb{R}.$$

Soient $M(1+t, 2-t, 3-t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite (AB) et $N(-1+3u, u, 1-2u)$, $u\in\mathbb{R}$, un point de la droite (CD).

$$M=N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+t=-1+3u \\ 2-t=u \\ 3-t=1-2u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-t \\ 1+t=-1+3(2-t) \\ 3-t=1-2(2-t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-t \\ 4t=4 \\ -3t=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-t \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

$\boxed{\text{L'affirmation 4 est fausse.}}$