EXERCICE 1

Pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$ **où** $\theta \in [0; 2\pi[$.

1.a) Calcul de P(1) :

$$P(1) = 1^3 - (1+2\cos\theta)\times 1^2 + (1+2\cos\theta)\times 1 - 1$$
$$= 1 - 1 - 2\cos\theta + 1 + 2\cos\theta - 1$$
$$= 0$$

- **Pour résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$, on factorise $P(z)$ et pour cela on peut utiliser la division euclidienne , une identification ,ou bien le tableau d'Horner : 1 est une racine du polynôme P**

	1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1		1	$-2\cos\theta$	1
	1	$-2\cos\theta$	1	0

Alors Pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - 2\cos\theta z + 1) = 0$

soit $z - 1 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \in \mathbb{R}$

ou $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$

Résolvons l'équation : $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$

$$\Delta' = (-\cos)^2 - 1\times 1$$
$$= \cos^2\theta - 1$$
$$= -(1 - \cos^2\theta)$$
$$= (i\sin\theta)^2$$

Donc

$$z' = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z'' = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Si $\sin\theta \geq 0$, $Im(z_1) \geq 0 \Rightarrow z_1 = z' = \cos\theta + i\sin\theta$ si $\theta \in [0, 2\pi[$

Alors : $z_2 = \cos\theta - i\sin\theta$.

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ est :

$S = \{1; \cos\theta + i\sin\theta; \cos\theta - i\sin\theta\}$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les nombres z_0, z_1 et z_2 sont les affixes respectives de M_0, M_1 et M_2 Déterminer les lieux géométriques de M_1, M_2 lors que θ décrit $[0, 2\pi[$:

$$M_1(x_{M_1}; x_{M_1}) \Rightarrow \begin{cases} x_{M_1} = \cos\theta \\ y_{M_1} = \sin\theta \Leftrightarrow x_{M_1}^2 + y_{M_1}^2 = 1 \\ \theta \in [0, 2\pi[\end{cases}$$

$\Leftrightarrow M_1$ Décrit le cercle de centre O et de rayon 1

Autrement :

$$OM_1 = |z_1 - 0| = |e^{i\theta}| = 1, \quad \theta \in]0;2\pi[$$

Donc M_1 décrit le cercle de centre O et de rayon 1

De même pour M_2 : M_2 décrit le cercle de centre O et de rayon 1

3)

G=bar	M_0	M_1	M_2	
	1	1	-3	$1+1-3 \neq 0$

a) Le lieu géométrique du point G :

Calculons z_G l'affixe du point G :

$$z_G = \frac{1\times z_0 + 1\times z_1 - 3z_2}{1+1-3} = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta - 3(\cos\theta - i\sin\theta)}{1+1-3}$$

$$\boxed{z_G = -1 + 2\cos\theta - 4i\sin\theta}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = -4\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x+1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{4}y \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

Alors le lieu géométrique Γ de G est l'ellipse d'équation $\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Soient (x, y) les coordonnées de G dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ et considérons le point $\Omega(-1,0)$; alors dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ les cordonnée $(X;Y)$ de G vérifient : $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{16} = 1$ car

$$\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$$

Alors le lieu géométrique Γ de G est l'ellipse dont l'équation réduite dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$

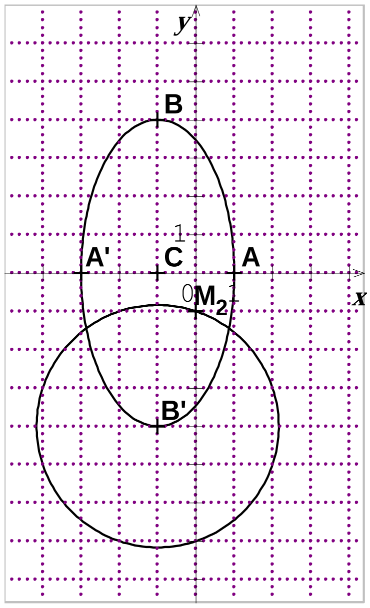
$$\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{4^2} = 1$$

Comme $b = 4 > 2 = a$, alors les éléments caractéristiques (dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ sont :

- Le centre $\Omega(-1,0)$,
- Les sommets:

- Dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ les sommets sont

A(2 ,0) ; A'(-2,0), B(0,4) et B'(0,-4)



Or $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y \end{cases}$

- Donc dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v}))$ les sommets sont $A(1,0), A'(-3,0), B(-1;4)$ et $B'(-1,-4)$

- $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$
- L'excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Construction de Γ

4)

a) Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors

- $z_0 = 1 \Leftrightarrow M_0(1,0)$
- $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow M_1(0,1)$
- $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow M_2(0,-1);$

Alors $z_G = -1 + 2\cos\frac{\pi}{2} - 4i\sin\frac{\pi}{2} = -1 - 4i \Rightarrow G(-1,-4)$

En particulier, G est un sommet de Γ : $G = B'$.

b) Γ' est l'ensemble de points M du plan tels que $MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2 = 6$

C'est la ligne de niveau 6 de la fonction scalaire de Leibniz $\varphi(M) = MM_0^2 + MM_1 - 3MM_2^2$ associée au systeme $\{(M_0,1),(M_1,1),(M_2,-3)\}$ dont le barycentre est G. Donc, par réduction d'écriture : $M \in \Gamma' \Leftrightarrow -MG^2 + \varphi(G) = 6$

$$\varphi(G) = GM_0^2 + GM_1^2 - 3GM_2^2$$

$$GM_0{}^2 = |z_O - z_G|^2 = (-1-1)^2 + (-4-0)^2 = 20$$

$$GM_1{}^2 = |z_1 - z_G|^2 = (0+1)^2 + (1+4)^2 = 26$$

$$GM_2{}^2 = |z_O - z_G|^2 = (0+1)^2 + (-1+4)^2 = 10$$

Alors $\varphi(G) = 16$

Donc $M \in \Gamma' \Leftrightarrow MG^2 = 10$ d'où Γ' est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{10} = GM_2$

Γ' est le cercle de centre G passant par M_2 car $GM_2{}^2 = 10$.

Autre méthode

$$\varphi(M_2) = M_2M_0{}^2 + M_2M_1{}^2 - 3M_2M_2{}^2$$
$$= \left((1-0)^2 + (0+1)^2\right) + \left((0-0)^2 + (1+1)^2\right) + 0 = 6$$

Alors $M_2 \in \Gamma'$. Donc $\Gamma' \neq \{\ \}$ et $\Gamma' \neq \{G\}$. Par suite Γ' est le cercle de centre G passant par M_2.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x(1-\ln x) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$,

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) a)- Continuité de f à droite en 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(1-\ln x) = \lim_{x\to 0^+}(x - x\ln x) = 0-0 = 0$$

Comme $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, alors f est continue en 0^+

- Dérivabilité de f à droite en 0:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\ln x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}(1-\ln x) = 1+\infty = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0^+.

Interprétation graphique: la courbe de f admet, à droite de 0, une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

b- Les variations de f :

- Les limites de f aux bornes de son domaine de définition:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) : \left| \begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty}(1-\ln x) = -\infty \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

- La dérivée de f :

$$f'(x) = 1-\ln x + x\times\frac{-1}{x} = 1-\ln x - 1 = -\ln x$$

D'où $\begin{cases} f'(x) \le 0, & x \ge 1 \\ f'(x) \ge 0, & x \in [0,1] \end{cases}$

$f'(1)=0$ et $f(1) = 1(1-\ln 1) = 1$

- Tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	1	↘	$-\infty$

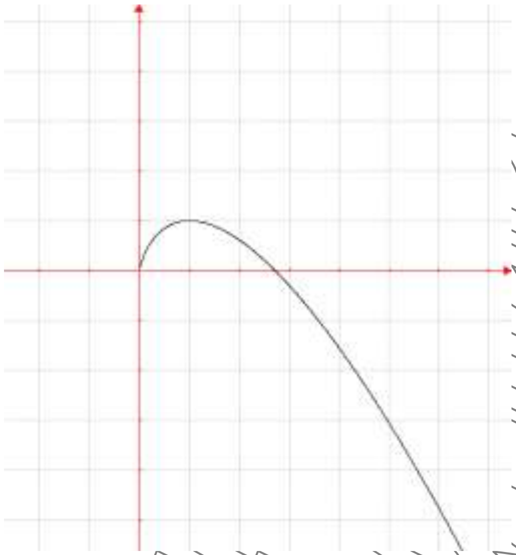
c- Calcul de $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\ln x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(1-\ln x) = 1-\infty = -\infty$$

- Donc la courbe de f admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction (Oy)

- L'intersection de (C) avec l'axe (Ox):

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(1-\ln x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \\ \text{ou } x = 0 \end{cases}$$



2) Soit f_n la fonction définie pour $n \geq 1$ par $\begin{cases} f_n(x) = x^n(1-\ln x) & x>0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

a)- La continuité de f_n à droite en 0, pour $n \geq 2$

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} x^n(1-\ln x) = \lim_{x\to 0^+}(x^n - x^n \ln x) = 0-0=0$$

Donc comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = f_n(0)$ alors f_n est continue en 0^+

- La dérivabilité de f à droite en 0, pour $n \geq 2$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^n(1-\ln x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x^{n-1} - x^{n-1}\ln x = 0-0=0$$

Donc f_n est pas dérivable en 0^+.

Interprétation graphique : la courbe de f_n admet, à droite de 0, une demi-tangente horizontale d'équation $y = 0$.

b- Les variations de f_n :

- Les limites de f_n aux bornes de son domaine de définition:

$$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) : \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} (1-\ln x) = -\infty \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f_n(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$$

- La dérivée de f_n

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-\ln x) + x^n \times \frac{-1}{x} = x^{n-1}(n-1-n\ln x)$$

D'où:

$$\forall n \geq 1,\ f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{soit } n\ln x = n-1 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{n-1}{n} \Leftrightarrow x = e^{\frac{n-1}{n}} \\ \text{ou bien } nx^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

$$f_n\left(e^{\frac{n-1}{n}}\right) = \left(e^{\frac{n-1}{n}}\right)^n \left(1-\ln\left(e^{\frac{n-1}{n}}\right)\right) = e^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{e^{n-1}}{n}$$

- **Tableau de variation de f_n :**

x	0		$e^{\frac{n-1}{n}}$		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^{n-1}}{n}$	$\searrow$	$-\infty$

3) a- **Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes, pour cela il suffit de montrer que les courbes (C_n) et (C_{n+1}) ont trois points communs:**

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)\Leftrightarrow x^{n+1}(1-\ln x)=x^n(1-\ln x)\Leftrightarrow x^n(1-\ln x)(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=e$$

Donc toutes les courbes (C_n) passent par les trois points de coordonnées $\left(0,f_n(0)\right),\left(1,f_n(1)\right)$ et $\left(e,f_n(e)\right)$

Alors les points de coordonnées $\left(0,0\right),\left(1,1\right)$ et $\left(e,0\right)$ sont communs à toutes les courbes (C_n).

b- Pour étudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) on étudie le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$

Alors d'après la question 3) a- on peut établir le tableau suivant:

x	0		1		e	$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f_n(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
Positions relatives	PI	C_n/C_{n+1}	PI	C_{n+1}/C_n	PI	C_n/C_{n+1}

4) **Pour tout pour $n\geq 1$ on définit la suite $U_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1}f_n(x)dx$**

a- **L'interprétation géométrique de l'intégrale U_n :**

Comme (C_n) est au-dessus de (OX) sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e};1\right]$ alors U_n est l'aire du domaine plan limité par (C_n), (OX) et les droites d'équations $x=\frac{1}{e};\ x=1$

b- **Montrons sans calcul que la suite (U_n) est positive et décroissante:**

- **D'après le tableau de variation f_n est positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e};1\right]$, de plus $\frac{1}{e}\leq 1$ alors $U_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1}f_n(x)dx\geq 0$**
- $U_{n+1}-U_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1}f_{n+1}(x)dx-\int_{\frac{1}{e}}^{1}f_n(x)dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(f_{n+1}(x)-f_n(x)\right)dx$

Or $\frac{1}{e}\leq 1$ et d'après la question 3)b- on a $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ est négative sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e};1\right]$ alors (U_n) est décroissante.

c- L'expression de U_n en fonction de n et la limite de (U_n):

- **Calculons $U_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1}f_n(x)dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}x^n(1-\ln x)dx$ en utilisant une intégration par parties:**

$$\left|\begin{array}{l} u(x)=1-\ln x\Rightarrow u'(x)=-\frac{1}{x}\\ v'(x)=x^n\Rightarrow v(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\end{array}\right.$$

Alors $$U_n=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\times(1-\ln x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}-\frac{1}{x}\times\frac{1}{n+1}x^{n+1}dx$$

$$U_n=\left(\frac{1}{n+1}\times 1\times(1-\ln 1)\right)-\left(\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{e^{n+1}}\times(1-\ln\frac{1}{e})\right)+\frac{1}{n+1}\int_{\frac{1}{e}}^{1}x^n dx$$

$$U_n=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{2}{e^{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\left[x^{n+1}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$U_n=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{2}{e^{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\left(1-\frac{1}{e^{n+1}}\right)$$

- **La limite de (U_n)**

Comme $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{n+1}}=0\end{array}\right.$ **, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

EXERCICE 3

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

1) a- Calcul de limites de f:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}-1)}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}+1)}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^{x}}(1-e^{-2x})}{\cancel{e^{x}}(1+e^{-2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

Interprétation graphique: la courbe de f admet deux asymptotes horizontales, l'une d'équation $y=-1$ au voisinage de $-\infty$, l'autre d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$.

b- Démonstration que f est impaire et le tableau de variation de f

- $\begin{cases} Df = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in Df ; -x \in Df \\ f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -f(x) \end{cases}$ alors f est une fonction impaire.
- Les variations de f

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

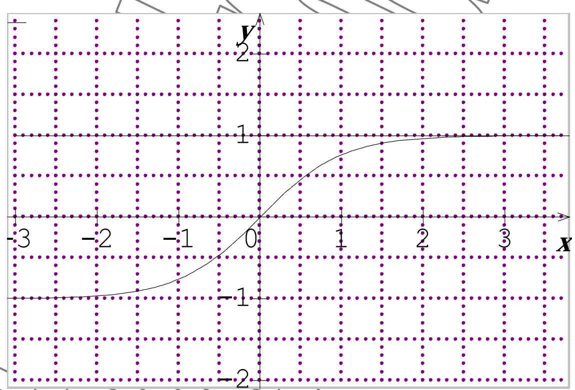
$$f'(x) = \frac{(\cancel{e^{2x}} + 2e^{-x}e^x + \cancel{e^{-2x}}) - (\cancel{e^{2x}} - 2e^{-x}e^x + \cancel{e^{-2x}})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{4e^{-x}e^x}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \geq 0$$

Alors f a le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	-1	↗	1

c- La courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm



d- Calcul de A, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 3$; on remarque que (C) est au-dessus de l'axe (Ox) sur $[0; \ln 3]$

$$A = \int_0^{\ln 3} f(x)dx = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \left[\ln(e^x + e^{-x})\right]_0^{\ln 3}$$

$$= \ln(3 + \frac{1}{3}) - \ln(1+1) = \ln\frac{5}{3}$$

2) On définit la suite numérique (U_n) par $U_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt$

a) Calcul de U_1

$$U_1 = \int_0^{\ln 3} f(t)dt = A = \ln\frac{5}{3}$$

b) **Montrons que pour tout entier naturel n, on a:** $0 \le U_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$:

- **On sait que f est croissante sur l'intervalle** $[0;\ln 3]$

Alors $\forall t \in [0;\ln 3] \quad f(0) \le f(t) \le f(\ln 3) \Rightarrow 0 \le (f(t))^n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$\Rightarrow \int_1^{\ln 3} 0dt \le \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt \le \int_0^{\ln 3} \left(\frac{4}{5}\right)^n dt$$

$$\Rightarrow 0 \le U_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n [t]_0^{\ln 3}$$

Donc $0 \le U_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n \ln 3$

- **Comme** $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ **alors d'après le théorème des gendarmes** $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

c) **Vérifions que pour tout** $x \ge 0,\ 1 - f'(x) = (f(x))^2$:

$$1 - f'(x) = 1 - \frac{4e^{-x}e^x}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 4e^{-x}e^x}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2e^{-x}e^x + e^{-2x} - 4e^{-x}e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 2e^{-x}e^x + e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = (f(x))^2$$

Montrons que $\forall n \ge 0,\ U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

$$U_{n+2} - U_n = \int_0^{\ln 3} (f(t))^{n+2} dt - \int_0^{\ln 3} (f(t))^n dt$$

$$= \int_0^{\ln 3} \left[(f(t))^{n+2} - (f(t))^n\right] dt$$

$$= \int_0^{\ln 3} \left(f^n(t)\left[(f(t))^2 - 1\right]\right) dt$$

$$= \int_0^{\ln 3} \left(f^n(t)\left[-f'(t)\right]\right) dt$$

$$= -\int_0^{\ln 3} \left(f'(t) \times f^n(t)\right) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{n+1} f^{n+1}(t)\right]_0^{\ln 3}$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left[(f(\ln 3))^{n+1} - (f(0))^{n+1}\right]$$

$$= \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

Alors $\forall n \ge 0,\ U_{n+2} - U_n = \frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

d) **Pour tout entier naturel n strictement positive**

- **Montrons que** $U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

On applique la relation démontrée dans la question 2) c):

$\forall k \geq 2 \quad U_k - U_{k-2} = \dfrac{-1}{k-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{k-1}$ **pour les termes consécutifs d'indices pairs de la suite (U_n), termes d'indices $k = 2p$ et $k-2 = 2p-2, \quad p \in \mathbb{N}^*$**

$$\text{Donc } \forall p \geq 1 \quad U_{2p} - U_{2p-2} = \frac{-1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$$

$$\begin{cases} p=1: & \cancel{U_2} - U_0 = \dfrac{-1}{2\times1-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times1-1} \\ p=2: & \cancel{U_4} - \cancel{U_2} = \dfrac{-1}{2\times2-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times2-1} \\ p=3: & \cancel{U_6} - \cancel{U_4} = \dfrac{-1}{2\times3-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times3-1} \\ \dots & \cancel{\dots} - \dots = \dots \\ \dots & \dots - \dots = \dots \\ \dots & \cancel{\dots} - \dots = \dots \\ p=2n: & U_{2n} - \cancel{U_{2n-2}} = \dfrac{-1}{2n-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n-1} \end{cases}$$

En additionnant et simplifiant membres à membres on obtient:

$$U_{2n} - U_0 = \sum_{p=1}^{n} \frac{-1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \quad \text{or } U_0 = \int_0^{\ln 3} (f(t))^0 dt = [t]_0^{\ln 3} = \ln 3$$

$$\text{Donc } U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$$

- **Montrons de même que** $U_{2n+1} = \ln\dfrac{5}{3} - \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{2p}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2p}$ **:**

On applique la relation démontrée dans la question 2) c):

$\forall k \geq 2 \quad U_k - U_{k-2} = \dfrac{-1}{k-1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{k-1}$ **pour les termes successifs d'indices impairs de la suite (U_n), termes d'indices $k = 2p+1$ et $k-2 = 2p-1, \quad p \in \mathbb{N}^*$**

$$\text{donc} \quad U_{2p+1} - U_{2p-1} = \frac{-1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \quad \forall p \geq 1$$

Alors

$$\begin{cases} p=1: & \cancel{U_3}-U_1=\dfrac{-1}{2\times1}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times1} \\ p=2: & \cancel{U_5}-\cancel{U_3}=\dfrac{-1}{2\times2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times2} \\ p=3: & \cancel{U_7}-\cancel{U_5}=\dfrac{-1}{2\times3}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\times3} \\ \ldots & \cancel{\ldots}\ -\ \ldots\ =\ \ldots. \\ \ldots & \ldots\ -\ \ldots\ =\ \ldots. \\ \ldots & \cancel{\ldots}\ -\ \ldots\ =\ \ldots. \\ p=2n: & U_{2n+1}-\cancel{U_{2n-1}}=\dfrac{-1}{2n}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2n} \end{cases}$$

En additionnant et simplifiant membres à membres on obtient:

$$U_{2n+1}-U_1=\sum_{p=1}^{n}\frac{-1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \quad \text{or } U_1=\ln\frac{5}{3}$$

Donc $U_{2n+1}=\ln\dfrac{5}{3}-\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$

d) Pour tout entier naturel n strictement positif on pose

$$S_n=\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^4\ldots+\frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}=\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p$$

Calcul de limite de la suite S_n

On a $S_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$

Or, d'après la question 2) d) on a

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}=-U_{2n}+\ln 3 \quad \text{et}$$

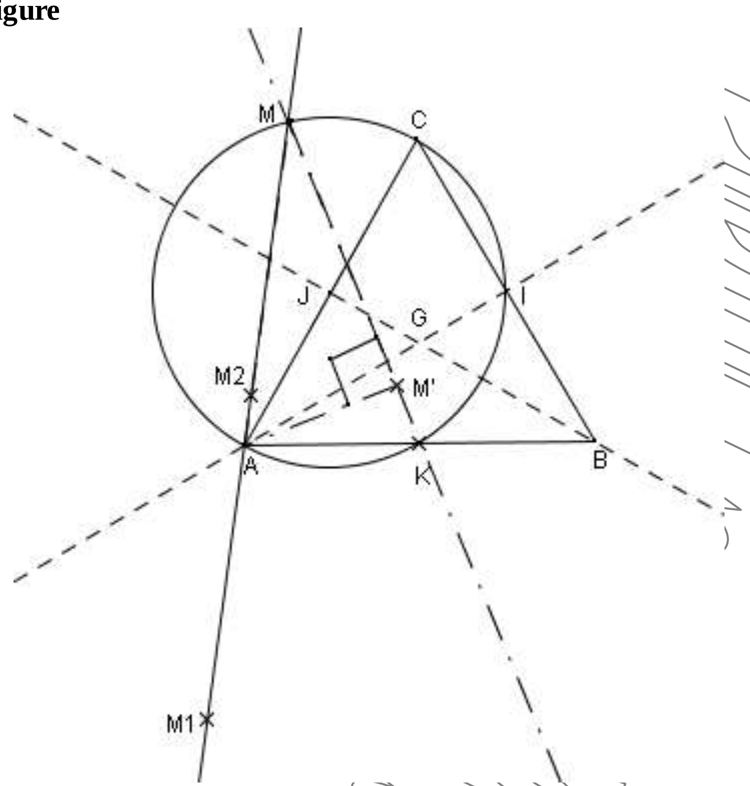
$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}=-U_{2n+1}+\ln\frac{5}{3}$$

Alors $S_n=-U_{2n}+\cancel{\ln 3}-U_{2n+1}+\ln 5-\cancel{\ln 3}$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\ln 5$

EXERCICE 4

1) a) La figure



b) **Montrons qu'il existe une seule rotation r_1 qui transforme I en A et B en J :**

Comme $\begin{cases} AJ = IB = \dfrac{a}{2} \\ \overrightarrow{AJ} \neq \overrightarrow{IB} \end{cases}$ **alors il existe une unique rotation r_1 qui transforme I en A et B en J**

c) **l'angle de r_1**

$$\alpha_1 = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AJ}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi [2\pi]$$

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

Le centre $\Omega = \text{med}[IA] \cap \text{med}[BJ]$

$\Rightarrow \Omega = K$

Conclusion $r_1(K; \dfrac{2\pi}{3})$

2) **Soit r_2 la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$**

a) **Déterminons $r_2(C)$ et $r_2(J)$**

Comme ICJ est équilatéral direct alors $r_2(C) = J$

De même IJK est équilatéral direct d'ou $r_2(J) = K$

b) **L'image de la droite (AC) :**

On a $(AC) = (CJ)$ **donc** $r_2(AC) = r_2(CJ) = (JK)$

3) **Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $\dfrac{-1}{2}$ et on pose $s = r_1 \circ h$**

a) l'image du triangle ABC par $h(G;\frac{-1}{2})$:

Comme $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ alors $h(A) = I$

Comme $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ alors $h(B) = J$

Comme $\overrightarrow{GK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ alors $h(C) = K$

Alors $h(ABC) = IJK$

b) Nature et caractérisation de s :

$s = r_1 \circ h$ est la composée une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'une homothétie de rapport négatif $\frac{-1}{2}$, donc S est une similitude directe de rapport $k = \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ et d'angle $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{-\pi}{3}[2\pi]$

c) Détermination de s(A)

On a $s(A) = r_1 \circ h(A) = r_1(I) = A$

Comme $s(A) = A$ on peut dire que A est le centre de la similitude s.

d) La forme réduite de s : c'est la composée de l'homothétie de rapport $k = \frac{1}{2}$ et de centre A et la rotation d'angle $\frac{-\pi}{3}$ et de centre A :

Soit $h'(A;\frac{1}{2})$ et $r'(A;\frac{-\pi}{3})$ alors $s = r' \circ h' = h' \circ r'$

4) On pose $s^1 = s$ et $s^{n+1} = s \circ s^n$

a) Caractérisation de s^3

s^3 est la composée des similitudes de même centre A et dont la somme des angles $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

Donc s^3 est une homothétie de rapport négatif $-\left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$ et de centre A

$s^3 = H(A, -\frac{1}{8})$

b) On pose $p = 10^{2011}$ montrons que s^{p-1} est une homothétie de rapport négatif, pour cela il suffit de montrer que l'angle de la similitude s^{p-1} est un multiple impair de π :

- $$p - 1 = 10^{2011} - 1 = \underbrace{99.....9}_{2011\ \text{fois}} = 9 \times \underset{2011\ \text{fois}}{11....1}$$

Donc $p-1$ est un multiple impair de 9 et par conséquent $p - 1 = 9(2k+1),\quad k \in \mathbb{N}$

Donc l'angle α de s^{p-1} :

$$\alpha=(p-1)(-\frac{\pi}{3})=9(2k+1)(-\frac{\pi}{3})$$
$$=-3(2k+1)\pi$$
$$=\pi[2\pi]$$

- **Autre méthode**

$$p-1=10^{2011}-1=(10-1)\frac{10^{2011}-1}{10-1}=9\times\frac{1-10^{2011}}{1-10}$$

Or $\frac{1-10^{2011}}{1-10}$ est la somme de 2011 termes consécutifs de la suite géométrique de raison 10 et

de premier terme 1: $1+10+10^2+...+10^{2010}=\frac{1-10^{2011}}{1-10}$

Alors on peut écrire $p-1=9\left(1+10+10^2+...+10^{2010}\right)$

Et comme pour tout entier naturel n, 10^n est pair alors l'entier $1+10+10^2+...+10^{2010}$ est impaire

Ce qui signifie qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $1+10+10^2+...+10^{2010}=2k+1$

D'où $p-1=9(2k-1)$.

Donc l'angle α de s^{p-1} :

$$\alpha=(p-1)(-\frac{\pi}{3})=9(2k+1)(-\frac{\pi}{3})$$
$$=\pi[2\pi]$$

Conclusion: si $p=10^{2011}$ alors s^{p-1} est une similitude d'angle π, donc c'est une homothétie de rapport négatif

5) **Pour tout point M du plan, on pose**

$r_1(M)=M_1$, $r_2(M)=M_2$ **et** $s(M)=M$ **(voir la figure).**

a) **Détermination de M_1 et M_2**

- **Si $M=I$: alors** $\begin{cases}M_1=r_1(I)=A\\ M_2=r_2(I)=I\end{cases}$
- **Si $M=K$: alors** $\begin{cases}M_1=r_1(K)=K\\ M_2=r_2(K)=B\end{cases}$
- **Si $M=A$: alors** $\begin{cases}M_1=r_1(A)=J' \text{ tel que } J'=S_K(J)\\ M_2=r_2(A)=I' \text{ tel que } I'=S_{BK}(I)\end{cases}$

b) **Montrons que le triangle AMM' est rectangle en M':**

On a $s(M)=M'$ alors $\begin{cases}AM'=\frac{1}{2}AM\\ (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})=-\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

D'après la relation d'Alkashi

$$MM'^2=AM^2+AM'^2-2AM.AM'\cos(-\frac{\pi}{3})$$

$$MM'^2 = AM^2 + \frac{1}{4}AM^2 - \cancel{2}AM.\frac{1}{\cancel{2}}AM \times \frac{1}{2}$$

$$MM'^2 = \frac{3}{4}AM^2$$

Donc on trouve

$$AM'^2 + MM'^2 = \frac{1}{4}AM^2 + \frac{3}{4}AM^2$$
$$= AM^2$$

Comme $AM'^2 + MM'^2 = AM^2$ donc d'après le réciproque de Pythagore le triangle AMM' est rectangle en M'

c) **Déterminons l'ensemble Γ de points M du plan tel que M, M_1 et M_2 soient alignés:**

D'après Chasles

$$\boxed{(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) = (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MK}) + (\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) + (\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MM_2}) \quad *}$$

- **$r_1(K; \frac{2\pi}{3}): M \to M_1$ Donc le triangle KMM_1 est isocèle direct en K; et $(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM_1}) = \frac{2\pi}{3}$**

  Par conséquent $(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MK}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

- **$r_2(I; \frac{\pi}{3}): M \to M_2$ Donc le triangle IMM_2 est équilatéral direct.**

  Par conséquent $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MM_2}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc en remplaçant dans la relation $*$ on obtient:

$$(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) = \frac{\pi}{6} + (\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) - \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$
$$= (\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) - \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$

Alors les points M, M_1 et M_2 soient alignés sin et seulement si:

$$(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) = 0 \ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) - \frac{\pi}{6} = 0 \quad [\pi]$$
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) = \frac{\pi}{6} \quad [\pi]$$

Et comme $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6} \ [\pi]$ alors $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) \ [\pi]$

D'où M, K, I et A sont cocycliques, alors M appartient au cercle de diamètre $[AC]$

Alors L'ensemble Γ de points M du plan tel que M, M_1 et M_2 soient alignés est le cercle de diamètre $[AC]$ Privé de K et I.

6) **On suppose dans cette question que M est situé sur le cercle de diamètre $[AC]$ privé de A**

a) **Montrons que la droite (MM_2) passe par un point fixe:**

On sait que M est situé sur le cercle de diamètre $[AC]$ privé de A

Donc $(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MA})=(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CA})=-\frac{\pi}{3}\ [\pi]$ **D'où** $\boxed{(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MA})=-\frac{\pi}{3}\ [\pi]}$

Dans le triangle MIM_2 équilatéral indirect on a $\boxed{(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MM_2})=-\frac{\pi}{3}\ [\pi]}$

D'où $(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MA})=(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MM_2})\ [\pi]$

$\Rightarrow(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MA})-(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MM_2})=0\ [\pi]$

$\Rightarrow(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MI})=0\ [\pi]$

Alors de Chasles on a: $(\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MA})=0\ [\pi]$ **donc les points M, A et M_2 sont alignés.**

Conclusion; la droite (MM_2) passe par le point fixe A.

b) **Montrons que la droite (MM') passe par un point fixe:**

On sait que le triangle AMM' rectangle en M' on a $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})=\frac{-\pi}{3}[\pi]$

D'où: $\boxed{(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MA})=\frac{-\pi}{6}[\pi]}$

Or M est sur le cercle de diamètre $[AC]$ alors on a

$\boxed{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MK})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CK})=\frac{\pi}{6}[\pi]}$

En sommant membres à membres les deux dernières relations on obtient:

$(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MK})=0[\pi]$

Alors $(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MK})=0[\pi]$

Conclusion: la droite (MM') passe par le point fixe K.

c) **Montrons que l'angle $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{MM'})$ a une mesure constante α, et déterminons cette mesure:**

- On sait que M est sur le cercle de diamètre $[AC]$ alors les points M, M_1 et M_2 sont alignés et les points A, M et M_2 le sont aussi.

Alors les points A, M, M_1 et M_2 sont alignés, d'où les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires

- On sait que les points M, M' et K sont alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MK}$ sont colinéaires.

Alors $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{MM'})=(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MK})$ **: colinéarité**

$=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CK})$ **: cocyclicité**

Donc $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{MM'})=\frac{\pi}{6}[\pi]$

Conclusion: L'angle $(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{MM'})$ garde la mesure constante $\frac{\pi}{6}$ si M décrit le cercle de diamètre $[AC]$ privé de A .