exercice 1

$P(z) = z^3 - (6-2i)z^2 + (10-8i)z - 4 + 8i$

1.a) Calcul de $P(2)$

$P(2) = 2^3 - (6-2i)2^2 + (10-8i)2 - 4 + 8i$

$= 8 - 24 + 8i + 20 - 16i - 4 + 8i$

$= 28 - 28 + 16i - 16i$

Donc $\boxed{P(2) = 0}$.

1.b) Resoudre $P(z) = 0$.

	1	$-6+2i$	$10-8i$	$-4+8i$
2		2	$-8+4i$	$4-8i$
	1	$-4+2i$	$2-4i$	0

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$:

$P(z) = (z-2)(z^2 + (-4+2i)z + 2 - 4i)$

D'où

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 + (-4+2i)z + 2 - 4i = 0. \end{cases}$$

$\boxed{z_0 = 2}$; ou

$\Delta = (-4+2i)^2 - 4(2-4i)$

$\Delta = 16 - 16i - 4 - 8 + 16i$

$\Delta = 4$

D'où

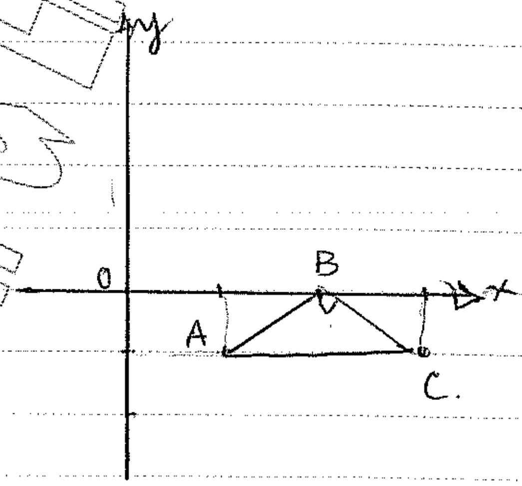
$z_1 = \dfrac{4-2i-2}{2} = 1 - i$

$z_2 = \dfrac{4-2i+2}{2} = 3 - i$

D'où les solutions :

$S = \{2 ; 1-i ; 3-i\}$.

2) $z_A = 1 - i$; $z_B = 2$; $z_C = 3 - i$



Mq : le triangle (ABC) est rectangle isocèle

$\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{1-i-2}{3-i-2} = \dfrac{(-1-i)}{(1-i)} \times \dfrac{(1+i)}{(1+i)}$

$\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-1-i-i+1}{1+1} = \dfrac{-2i}{2} = \cdot$

D'où le triangle (ABC) est rectangle isocèle en B.

Mq : le quadrilatère OACB est parallélogramme

on a :

$z_B - z_O = 2 - 0 = 2$

$z_C - z_A = (3-i) - (1-i) = 2$

D'où $z_B - z_O = z_C - z_A \Rightarrow \vec{OB} = \vec{AC}$

D'où le quadrilatère OACB est un parallélogramme

(3)

$S : M(z) \longrightarrow M'(z')$ tel que

$$z' = \frac{1+i}{2} z - i$$

a) :

l'expression de S est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, et $|a| \neq 1$

Donc S est une similitude directe du plan.

(b) Les éléments caractéristiques :

le rapport :

$$k = |a| = \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

le centre : Ω d'affixe :

$$\omega = \frac{-b}{1-a} = \frac{-i}{1-\frac{1+i}{2}}$$

$$\omega = \frac{-i}{\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} = \frac{(-2i)}{(1-i)} \times \frac{(1+i)}{(1+i)}$$

$$= \frac{-2i+2}{1+1} = \frac{2(1-i)}{2}$$

$$\boxed{\omega = (1-i)}$$

D'où $\Omega = A(1;-1)$

(c) Vérifier que $S(C) = B$:

Soit $C' = S(C)$. Alors :

$$z_{C'} = \frac{1+i}{2} z_C - i$$

$$\Rightarrow z_{C'} = \frac{1+i}{2}(3-i) - i$$

D'où $z_{C'} = \frac{3-i+3i+1}{2} - \frac{2i}{2}$

$$z_{C'} = \frac{4+2i}{2} - \frac{2i}{2}$$

$$z_{C'} = \frac{4+2i-2i}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

D'où $z_{C'} = z_B$ D'où

$$\boxed{C' = B}$$

D'où $S(C) = B$.

Exercice 2 :

① $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$

a) * $D_g = \mathbb{R}$ (fonction polynomiale)

* Les limites :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = -(-\infty)^3 = -(-\infty)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x^3) = -(+\infty)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$$

* La dérivée et T.V.

$$g'(x) = -3x^2 - 2x - 2$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4\times(-3)(-2)$$

$$\Delta = 4 - 24 = -20 < 0.$$

D'où $g'(x) < 0$.

T.V.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

b) Mq. g réalise une bijection :

D'après le tableau de variation g est continue et strictement monotone, donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

c) Comme g réalise une bijection donc l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α car $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Et on a $g(0,6) = -(0,6)^3 - (0,6)^2 - 2(0,6) + 2$

$\Rightarrow g(0,6) \simeq +0,22 > 0$

et $g(0,7) = -(0,7)^3 - (0,7)^2 - 2(0,7) + 2$

$\Rightarrow g(0,7) \simeq -0,23 \leq 0$

D'où $0,6 \leq \alpha \leq 0,7$

② On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x e^{-x}}{x^2+2}$.

a) Calcul de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2e^{-x} - 2xe^{-x})(x^2+2) - 2x\cdot 2xe^{-x}}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2e^{-x} + 4e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x}}{(x^2+2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2e^{-x} - 2x^3e^{-x} - 4xe^{-x} + 4e^{-x}}{(x^2+2)^2}$$

Donc
$$f'(x) = \frac{2e^{-x}(-x^3-x^2-2x+2)}{(x^2+2)^2}$$

D'où
$$f'(x) = \frac{2g(x)\cdot e^{-x}}{(x^2+2)^2}$$

(b) L'etude de $f(x)$.

les limites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}\left(\frac{2}{1+\frac{2}{x^2}}\right)$$

or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^2} = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{1+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{2x}{1+0} = -\infty \end{cases}$

D'où
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{1+x^2}\cdot e^{-x}$

et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0. \\ \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0. \end{cases}$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\times 0 = 0.$

or d'après a) $f'(x) = \dfrac{2g(x)\cdot e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

et donc $f'(x)$ a le même signe de $g(x)$. et d'après 1).c)

$g(\alpha)=0$ D'où le signe de $g(x)$ est

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

D'où le tableau de variations de f est

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

(c) La Courbe de f:

* On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. donc la courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$. au voisinage de $(+\infty)$

Et on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^{-x}}{x^2+2}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}\left(\frac{2}{1+\frac{2}{x^2}}\right)$

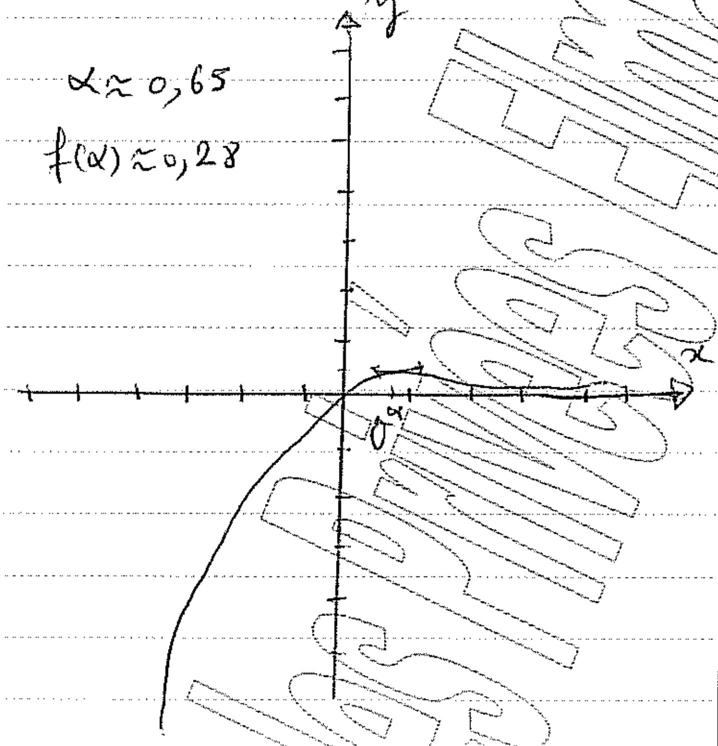
$= +\infty\left(\frac{2}{1+0}\right) = +\infty.$

D'où la courbe de f admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $(-\infty)$

<u>La courbe :</u>

$\alpha \simeq 0,65$

$f(\alpha) \simeq 0,28$



③ La suite (U_n) définie par :

$\forall n \geq 1, \; U_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt.$

on a pour $n \leq t \leq n+1$.

or $n \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq t$

$0 < t < t^2 < t^2+1$

d'où $0 \leq \frac{t}{1+t^2} < 1.$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{te^{-t}}{1+t^2} \leq e^{-t}$

$\Rightarrow$ On intègre :

$0 \leq \int_n^{n+1} \frac{te^{-t}}{1+t^2}\,dt \leq \int_n^{n+1} e^{-t}\,dt$

$0 \leq U_n \leq \left[-e^{-t}\right]_n^{n+1}$

$\Rightarrow \quad 0 \leq U_n \leq e^{-n} - e^{-n-1}$

$0 \leq U_n \leq e^{-n}\left[1-e^{-1}\right].$

$\boxed{0 \leq U_n \leq \left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-n}}$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$:

On a

$$0 \leq U_n \leq \left(1-\frac{1}{e}\right) \cdot e^{-n}$$

or $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{e}\right) e^{-n} = \left(1-\frac{1}{e}\right) \cdot 0 = 0$.

d'où d'après théorème de gendarme.

$$0 \leq \lim_{+\infty} U_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

(b) pour que $U_{n_0} \leq 10^{-5}$, alors il suffit $\left(1-\frac{1}{e}\right) e^{-n_0} \leq 10^{-5}$

$$\Rightarrow e^{-n_0} \leq \frac{10^{-5}}{1-\frac{1}{e}}$$

d'ou $-n_0 \leq \ln\left(\frac{10^{-5}}{1-\frac{1}{e}}\right)$.

$$\Rightarrow n_0 \geq -\ln\left(\frac{10^{-5}}{1-\frac{1}{e}}\right)$$

$$\Rightarrow n_0 \geq -\ln\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right) \cdot 10^{5}}\right)$$

$$\Rightarrow n_0 \geq \ln\left(\left(1-\frac{1}{e}\right) \cdot 10^{5}\right)$$

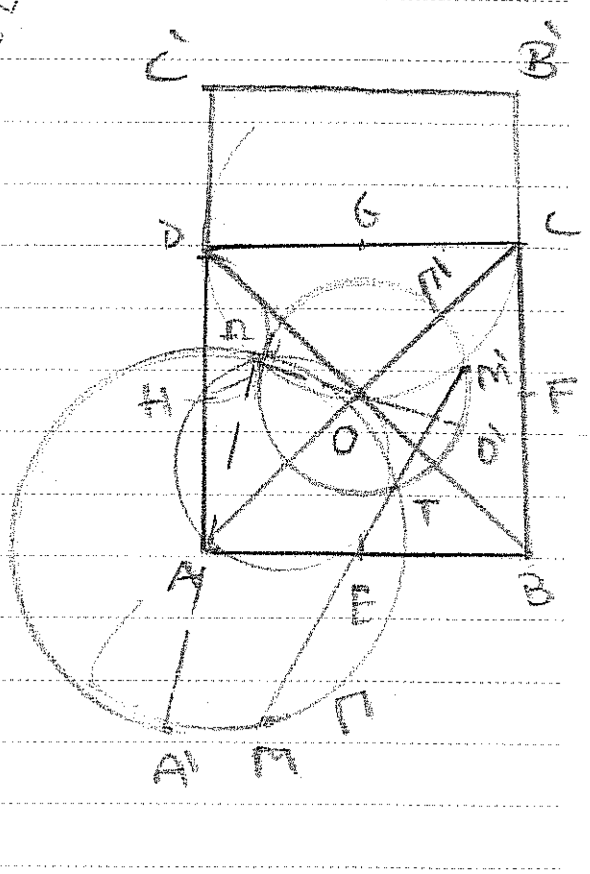
$$\Rightarrow n_0 \geq \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) + \ln\left(10^{5}\right)$$

$\Rightarrow n_0 \geq 12$.

d'où à partir $n_0 = 12$ on a

$$0 \leq U_n \leq 10^{-5}$$

Ex3 :



2.

a) On a $\begin{cases} DH = HO \neq 0 \\ \text{et} \end{cases}$ les vecteurs $\vec{DH}$ ~~et~~ $\vec{HO}$ (ne sont pas colinéaires) d'où il existe une unique rotation r telle que :

$r(D) = H$ et $r(H) = O$

b) le centre I de la rotation est tel que :

$ID = IH = IO$ d'où I est le centre du cercle circonscrit au triangle DHO. et Or DHO est rectangle en H d'où I est le milieu de [OD].

* l'angle α :

$\alpha = (\vec{DH}, \vec{HO}) = (\vec{ID}, \vec{IH})$ $[2\pi]$

or (HDO) est isocèle d'où

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

c) On pose $r(A) = A'$.

On a : $r : D \longrightarrow H$

$r : A \longrightarrow A'$

d'où $r([DA]) \longrightarrow [HA']$

or H est le milieu de [DA] et la rotation conserve le milieu d'où ;

$r(H)$ est le milieu de $r([DA])$ (conservation du milieu)

d'où O est le milieu de [HA']

or O est le milieu de [HF]

d'où $A' = F$

d'où $r : A \longrightarrow F$.

or l'image du carré DABC est un carré d'où HFB'C' est un carré direct.

(Conservation de la configuration)

Donc le point B' est tel que C soit le milieu de [B'F]

et de même le point C' est telle que D est le milieu de [HC'].

③ soit $h_{(D;\frac{1}{2})}$ une homothétie de centre D et de rapport $k=\frac{1}{2}$.

$S = r\circ h$,

a) On a S est la composée d'une homothétie et une rotation.

d'où S est une similitude directe

Son rapport est $k=\frac{1}{2}$,

Son angle est $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

ⓑ, L'image du carré ABCD par la similitude S.

On a

$S(A) = r\circ h_{(D,\frac{1}{2})}(A) = r(H) = O$.

$S(B) = r\circ h_{(D,\frac{1}{2})}(B) = r(O) = G$.

$S(C) = r\circ h_{(D,\frac{1}{2})}(C) = r(G) = D$.

$r(D) = r\circ h_{(D,\frac{1}{2})}(D) = r(D) = H$

d'où

$S(ABCD) = (OGDH)$.

④. Soit Ω le centre de la similitude S.

a) On a
$\begin{cases} S(\Omega)=\Omega \\ S(A)=O \end{cases} \Rightarrow$

$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega O}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

d'où $\Omega \in \mathcal{C}_{[AO]}$ (cercle de diamètre [AO])

De même :

$\begin{cases} S(\Omega)=\Omega \\ S(B)=G \end{cases}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega G}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

d'où $\Omega \in \mathcal{C}_{[BG]}$

De même

$\Omega \in \mathcal{C}_{[CD]}$ et $\in \mathcal{C}_{[DH]}$

d'où Ω appartient aux cercles de diamètres respectifs [AO] ~~et~~ [BG], [CD] et [DH].

(b) Soit Γ le cercle passant par Ω et de centre A.

La similitude conserve la configuration d'où $S(\Gamma)$ est un cercle passant par $S(\Omega)$ et de centre $S(A)$

or $S(\Omega) = \Omega$ et $S(A) = O$

d'où $S(\Gamma)$ est le cercle passant par Ω et de centre O.

d'où $S(\Gamma) = \Gamma'$.

$O\Omega = OT$ et $A\Omega = AT$, D'où

On a (OA) est la médiatrice de $[\Omega T]$

D'où

$$\begin{cases} S_{(AO)}(\Omega) = T \\ S_{(AO)}(A) = A \\ S_{(AO)}(O) = O \end{cases}$$

d'où $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega O}) = (\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TO}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

D'où les points Ω, A, T, et O sont cocycliques.

(c) Soit $M \in \Gamma$ et $s(M) = M'$.

On a

$2(\overrightarrow{TM}; \overrightarrow{TM'}) = 2(\overrightarrow{TM}, \overrightarrow{T\Omega}) + 2(\overrightarrow{T\Omega}; \overrightarrow{TM'})$

D'après le théo. de l'angle au centre:

$\Rightarrow 2(\overrightarrow{TM}, \overrightarrow{TM'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A\Omega}) + (\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OM'})$

or $\begin{cases} S(\Omega) = \Omega \\ S(M) = M' \\ S(A) = O \end{cases} \Rightarrow (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OM'})$

$\Rightarrow (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OM'})$.

d'où $2(\overrightarrow{TM}, \overrightarrow{TM'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A\Omega}) + (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AM})$

$\Rightarrow 2(\overrightarrow{TM}, \overrightarrow{TM'}) = 0\ [2\pi]$.

D'où les points T, M, et M' sont alignés.

(d) On a $A' = S_A(\Omega)$

alors $A' = \text{bar}\begin{vmatrix} \Omega & A \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

et $\begin{matrix} \Omega \xrightarrow{s} \Omega \\ A \longrightarrow O \end{matrix}$. D'où

$s(A') = \text{bar}\begin{vmatrix} \Omega & O \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = O'$

car $O' = S_O(\Omega)$.

Donc :

$$\begin{aligned} \Omega &\xrightarrow{S} \Omega \\ A' &\longrightarrow O' \\ M &\longrightarrow M' \end{aligned}$$

Alors les triangles $\Omega A'M$ et $\Omega O'M'$ sont semblables ; ils sont rectangles respectivement en M et M' car leurs hypoténuses sont des diamètres des cercles Γ et Γ'.

Pour tout point M de Γ distinct de Ω et T,

On considère la similitude

$$\begin{aligned} \Omega &\xrightarrow{S'} \Omega \\ A' &\longrightarrow M \\ O' &\longrightarrow M' \end{aligned}$$

Par conservation du milieu on a $S'(K) = J$

Donc

$$\begin{aligned} \Omega &\xrightarrow{S'} \Omega \\ A' &\longrightarrow M \\ O' &\longrightarrow M' \\ K &\longrightarrow J \end{aligned}$$

D'où les triangles $\Omega A'M$, $\Omega O'M'$ et ΩKJ sont semblables.

Alors le triangle ΩKJ est rectangle en J, direct.

Comme le point K milieu de $[A'O']$ est fixe, le pt J est situé sur le cercle de diamètre $[\Omega K]$.

On a :

$M \neq \Omega \Rightarrow M' \neq \Omega \Rightarrow J \neq \Omega$

$M \neq T \Rightarrow M' \neq S_0(T) \Rightarrow J \neq O$

D'où le lieu géométrique de J lorsque M décrit Γ privé de Ω et T est le cercle de diamètre $[\Omega K]$ privé de Ω et O.

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = x.\ln(x+1).$$

1. a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} x.\ln(x+1).$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^+} x = -1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} \ln(x+1) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \end{cases}$$

D'où $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = (-1)(-\infty) = +\infty$

Interpretation graphique : La droite d'equation $x = -1$ est une asymptote verticale

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty \end{cases}$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(1+x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$

Interpretation graphique :

la courbe de la fonction admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$

b) calcul de la dérivée

$$f'(x) = 1.\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}.$$

Donc $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}.$

* si $x \in]-1,0]$. $\Rightarrow x+1 \leq 1$

Donc $\ln(x+1) \leq 0.$

et $x+1>0 \Rightarrow \frac{x}{x+1} \leq 0$

D'où $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \leq 0$

D'où $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ est décroissant

③ si $x \in [0,+\infty[$ alors :

$$1+x \geq 1 \Rightarrow \ln(1+x) \geq 0.$$

et $\frac{x}{1+x} \geq 0$

d'où $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \geq 0$

Donc $f(x)$ est croissante

ⓒ le tableau de variations

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

②a) Déterminer les réels a, b et c

tq $\frac{x^2}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

par identification

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \Rightarrow b = -1 \\ b+c = 0 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

D'où $\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$

ⓑ $A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$

on pose :

$$\begin{cases} u' = x \\ v = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x^2}{2} \\ v' = \frac{1}{x+1} \end{cases}$$

D'où

$$A = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}\,dx$$

$$A = \left[\frac{1^2}{2}\ln(1+1) - \frac{0^2}{2}\ln(0+1)\right] - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$A = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$A = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]_0^1$$

$$A = \cancel{\frac{\ln(2)}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) - \cancel{\frac{1}{2}\ln(2)}.$$

$$\boxed{A = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ u.a}$$

③ $\forall n \geq 1$: on pose $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

a) puisque la fonction : $x \to x^n \ln(x+1)$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$ alors $\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$ existe bien

d'où la suite (U_n) est bien définie

ⓑ. Calcul de U_1 :

$$U_1 = \int_0^1 x^1 \ln(x+1)\,dx = \int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$$

D'où $U_1 = \mathcal{A} \Rightarrow \boxed{U_1 = \frac{1}{4}}$

Donc U_1 est l'aire calculée dans la question ②ⓑ.

ⓒ Mq (U_n) est décroissante

on calcule $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$$

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \left(x^{n+1}\ln(x+1) - x^n\ln(x+1)\right)dx$$

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \left(x^n \ln(x+1)\right)\cdot(x-1)\,dx.$$

or pour $x \in [0,1]$.

$x^n \ln(x+1) \geq 0$ et $(x-1) \leq 0$

d'où $(x^n \ln(x+1))\cdot(x-1) \leq 0$

D'où $U_{n+1} - U_n \leq 0$

D'où la suite (U_n) est décroissante

Or $x^n \ln(x+1) > 0$

$\Rightarrow (U_n) > 0$ donc la suite (U_n) est minorée par 0 et décroissante d'où (U_n) est convergente.

ⓓ. on a : pour tout $n \geq 0$:

si $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2.$

$\Rightarrow \ln(1) \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$

$\Rightarrow 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2).$

$\Rightarrow 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2)$

on intègre :

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\,dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \ln(2)\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} 0 \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \leq 0.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$

4) pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$$\mathcal{V}_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx.$$

a). On a $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx.$

on pose $\begin{cases} u' = x^n \\ v = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v' = \frac{1}{x+1}. \end{cases}$

D'où

$$U_n = \left[\frac{x^n}{n+1}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{n+1}\ln(1+1) - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx$$

D'où $\mathcal{V}_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\mathcal{V}_n$

b). Si $0 \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1.$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{2} \leq \frac{x^{n+1}}{x+1} \leq x^{n+1}.$$

On intègre :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx \leq \int_0^1 x^{n+1}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \leq \mathcal{V}_n \leq \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

D'où $\frac{1}{2(n+2)} \leq \mathcal{V}_n \leq \frac{1}{n+2}.$

* la limite de $\mathcal{V}_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+2)} \leq \lim_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to+\infty} \mathcal{V}_n \leq 0.$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

c).

On a : $\sum_{i=0}^{n} (-x)^i = 1 - x + (-x)^2 + \dots + (-x)^n$.

c'est la somme d'une suite géométrique de raison $q = -x$

d'où $\sum_{i=0}^{n} (-x)^i = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$

$= \frac{1-(-1)^{n+1}(x)^{n+1}}{1+x}$

d'où

$\sum_{i=0}^{n} (-x)^i = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (-x)^i - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{1+x}$

D'où

$(-1)^n \left[\sum_{i=0}^{n} (-x)^i - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{x^{n+1}}{1+x}$.

D'où

$v_n = (-1)^n \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} (-x)^i - \frac{1}{x+1} \right) dx$

$\Rightarrow v_n = (-1)^n \int_0^1 (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n) - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$

$\Rightarrow v_n = (-1)^n \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \left[\ln(x+1) \right]_0^1$

$\Rightarrow v_n = (-1)^n \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} - \ln 2 \right]$

d). On a d'après (b) $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

D'où $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} - \ln(2) \right) = 0$

$\boxed{\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} \right) = \ln(2)}$