Exercice 01

on pose $f(x,y) = 2x - 3y$

1) a) Calculons $f(5,3)$

$f(5,3) = 2.5 - 3.3 = 1$

b) Deduisons les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'equation : $2x - 3y = 1$

on a : $(5,3)$ est une solution particulière

Par la suite on a :

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 1 \\ - \quad 2.5 - 3.3 = 1 \\ \hline 2(x-5) - 3(y-3) = 0 \end{array}$$

$2(x-5) = 3(y-3)$

Or $2 \wedge 3 = 1$ et $2 \mid 3(y-3)$, D'après Gauss

2 divise $y-3 \Rightarrow y - 3 = 2k$

$\Rightarrow y = 2k+3$

$3 / x-5 \Rightarrow x - 5 = 3k$

$x = 3k+5$

donc $S = \{ (3k+5 ; 2k+3) \; k \in \mathbb{Z} \}$

2) on pose $\forall n \geq 0 \quad X_n = f(5^n, 3^n)$

$X_n = 2.5^n - 3.3^n$

a) Determinons les valeurs de n le reste de la division Euclidienne de X_n par 7

faisons les congruences

$5^0 \equiv 1 [7]$	$3^0 \equiv 1 [7]$
$5^1 \equiv 5 [7]$	$3^1 \equiv 3 [7]$
$5^2 \equiv 4 [7]$	$3^2 \equiv 2 [7]$
$5^3 \equiv 6 [7]$	$3^3 \equiv 6 [7]$
$5^4 \equiv 2 [7]$	$3^4 \equiv 4 [7]$
$5^5 \equiv 3 [7]$	$3^5 \equiv 5 [7]$
$5^6 \equiv 1 [7]$	$3^6 \equiv 1 [7]$

la division Euclidienne de n par 6 donne $n = 6k + r \quad 0 \leq r \leq 5$

si $r = 0 \quad n = 6k$

$X_n = 2.5^{6k} - 3.3^{6k}$

$\equiv 2 - 3 [7]$

$\equiv -1 [7]$

$\equiv 6 [7]$

si $n = 6k$ le reste de X_n par 7 est 6

* si $r = 1 \quad n = 6k+1$

$X_n \equiv 2.5^{6k+1} - 3.3^{6k+1} [7]$

$\equiv 10 - 9 [7]$

$\equiv 1 [7]$

si $n = 6k+1$ le reste de X_n par 7 est 1

* si $r = 2 \quad n = 6k+2$

$X_n = 2.5^{6k+2} - 3.3^{6k+2}$

$\equiv 50 - 27 [7]$

$\equiv 23 [7]$

$\equiv 2 [7]$

si $n=6k+2$ le reste de X_n par 7 est 2

* si $r=3$ $n=6k+3$

$$X_n = 2.5^{6k+3} - 3.3^{6k+3}$$
$$\equiv 12-18\ [7]$$
$$\equiv -6\ [7]$$
$$\equiv 1\ [7]$$

si $n=6k+3$ le reste de X_n par 7 est 1

* si $r=4$ $n=6k+4$

$$X_n = 2.5^{6k+4} - 3.3^{6k+4}$$
$$\equiv 4-12\ [7]$$
$$\equiv -8\ [7]$$
$$\equiv 6\ [7]$$

si $n=6k+4$ le reste de X_n par 7 est 6

* si $r=5$ $n=6k+5$

$$X_n = 2.5^{6k+5} - 3.3^{6k+5}$$
$$\equiv 6-15\ [7]$$
$$\equiv -9\ [7]$$
$$\equiv 6\ [7]$$

si $n=6k+5$ le reste de X_n par 7 est 6

b) Montrons que

$X_{2015}-5$ est divisible par 7

divisons 2015 par 6 on obtient

$2015 = 6.335+5$

$$X_{2015} = 2.5^{6.335+5} - 3.3^{6.335+5}$$
$$\equiv 6-15\ [7]$$
$$\equiv -9\ [7]$$
$$\equiv 5\ [7]$$

$X_{2015}-5 \equiv 0\ [7]$

donc $X_{2015}-5$ est divisible par 7

Exercice 02

soit $P(z)=z^3-(6+5i)z^2+(1+20i)z+14-5i$

1) ⓐ Calculons

$P(i) = -i+6+5i+i-20+14-5i=0$

Determinons les complexes a et b tels que

$p(z)=(z-i)(z^2+az+b)$

Faisons le Tableau de Horner

	1	$-6-5i$	$1+20i$	$14-5i$
i		i	$4-6i$	$-14+5i$
	1	$-6-4i$	$5+14i$	0
		a	b	

donc $P(z)=(z-i)\left[z^2-(6+4i)z+5+14i\right]$

ⓑ. Resolvons $p(z)=0$

$(z-i)\left[z^2-(6+4i)z+5+14i\right]=0$

$z-i=0$ ou $z^2-(6+4i)z+5+14i=0$

$z=i$ $\quad \Delta=(6+4i)^2-4(5+14i)$

$\Delta = 36+48i-16-20-56i$

$\Delta = -8i$

Determinons les racines carrées de Δ

$-8i = 4(-2i) = [2(1-i)]^2 \Rightarrow \delta = \pm(2-i)$

Ou bien, avec une autre méthode :

$\begin{cases} x^2-y^2=0 & (1) \\ x^2+y^2=8 & (2) \end{cases}$
(x et y de signes différents)

$(1)+(2) \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x^2=4$

$x=2$ ou $x=-2$

$(2)-(1) \Rightarrow 2y^2=8 \Rightarrow y^2=4$
$y=2$ ou $y=-2$

$d_1=2-2i$

$z'=\dfrac{6+4i+2-2i}{2}=4+i$

$z''=\dfrac{6+4i-2+2i}{2}=2+3i$

$S=\{i,\ 2+3i,\ 4+i\}$

2) on pose $Z_A=i$ $Z_B=4+i$ $Z_C=2+3i$

soit S la similitude de centre S telle que $S(B)=C$

a) Determinons l'expression complexe de S

Comme S est une similitude directe

$S(M)=M' \Leftrightarrow z'=az+b$

Calculons a et b

A centre de $S \Leftrightarrow S(A)=A$

$\Leftrightarrow Z_A=aZ_A+b$

$\Rightarrow i=ai+b$

$\boxed{ai+b=i}$ (1)

$S(B)=C \Leftrightarrow Z_C=aZ_B+b$

$2+3i=a(4+i)+b$

$\boxed{(4+i)a+b=2+3i}$ (2)

on obtient $\begin{cases}(4+i)a+b=2+3i & (2)\\ ai+b=i & (1)\end{cases}$

$-(1)+(2) \Rightarrow 4a=2+2i$
$a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$b=i-ai=i-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)i$

$=i-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

l'expression complexe de S est

$S(M)=M' \Leftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

b) Determinons le rapport et l'angle de S

× rapport $k=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

angle: $\theta=\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\arg\frac{1}{2}+\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

car $\arg(1+i)=\arg\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

donc $S=S\left(A,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$

3) a) Determinons Γ_1

$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow \dfrac{z-i}{z-4-i}$ est imaginaire pur

$\Leftrightarrow \dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ est imaginaire pur

$\Leftrightarrow \Gamma_1$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B

Determinons Γ_2

$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow \dfrac{z-i}{z-2-3i}$ imaginaire pur

$\Leftrightarrow \dfrac{z-z_A}{z-z_C}$ est imaginaire pur

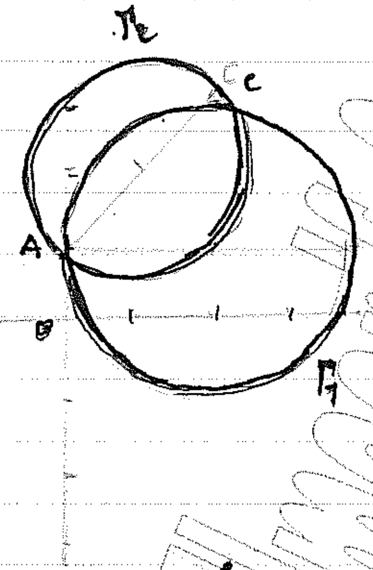
$\Leftrightarrow \Gamma_2$ est le cercle de diamètre $[AC]$ privé de A et C

b) justifions que $S(\Gamma_1)=\Gamma_2$

Comme $S(A)=A$ et $S(B)=C$

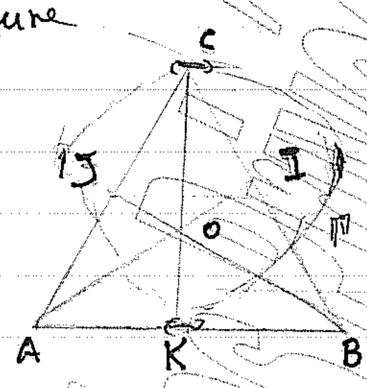
$\Gamma_1[AB] \xrightarrow{S} \Gamma[S(A)S(B)]=\Gamma[AC]$
$=\Gamma_2$

construction de Γ_1 et Γ_2



Exercice 03

1) ⓐ Figure



ⓑ Montrons qu'il existe une rotation r_1 telle que $r_1(B)=C$ et $r_1(J)=K$

comme (ABC) est equilateral

$BJ = CK$ et $\vec{BJ} \neq \vec{CK}$

alors il existe une unique rotation r_1 telle que $r_1(B)=C$ et $r_1(J)=K$

<u>centre de r_1</u>

comme $med[BC] = med[JK]$

le centre est $(BJ) \cap (CK) = \{O\}$

<u>angle de r_1</u> : α_1

$r_1(B)=C$, $r_1(J)=K$ $\Rightarrow \alpha_1 = (\vec{BJ}, \vec{CK}) = (\vec{OJ}, \vec{OK}) = \frac{2\pi}{3}$

donc $\boxed{r_1 = r(O, \frac{2\pi}{3})}$

c) soit $r_2(B)=C$ et $r_2(K)=J$

<u>centre de r_2</u> est $(BJ) \cap (CJ) = \{A\}$

car $med[BK] = med[CJ]$

<u>angle de r_2</u>

$\alpha_2 = (\vec{BK}, \vec{CJ}) = (\vec{IJ}, \vec{CJ}) = (\vec{JI}, \vec{JC}) = \frac{\pi}{3}$

donc $\boxed{r_2 = r(A, \frac{\pi}{3})}$

2) a) soit $f = r_1 o r_2$ et $g = r_2 o r_1$

* Caractérisons f

f est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

alors f est une symétrie centrale

$f(A) = r_1 o r_2(A) = r_1(A) = B$

or $K = A * B$

$f = S_K$

* Caractérisons g

g est la composée de 2 rotations

d'angle $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

alors g est une symétrie centrale

$g(C) = r_2 o r_1(C) = r_2(A) = A$

or $J = A * C$

donc $g = S_J$

b) Montrons que $g o f = t_{\overrightarrow{BC}}$

$g o f = S_J o S_K = t_{2\overrightarrow{KJ}} = t_{\overrightarrow{BC}}$

(d'après le Théorème du milieu)

3) a) Montrons qu'il existe une unique similitude directe S telle que $S(B) = I$ et $S(C) = J$

Comme $B \neq C$ et $I \neq J$

alors il existe une similitude directe S telle que

$S(B) = I$ et $S(C) = J$

* Déterminons l'angle de S

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IJ}) = (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IJ}) = \frac{\pi}{3}$

rapport de S

~~k=~~

Comme $S(B) = I$

$S(C) = J$

$k = \frac{IJ}{BC} = \frac{IJ}{AB} = \frac{IJ}{2IJ} = \frac{1}{2}$

b) Déterminons $S(A)$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} K \\ I \\ J \end{pmatrix}$$

équilatéral direct — équilatéral direct

$S(A) = K$

Déterminons $S(O)$

$O = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow S(O) = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} S(A) & S(B) & S(C) \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$

$= \text{bar}\begin{array}{c|c|c} K & I & J \\ 1 & 1 & 1 \end{array} = O$

(Conservation du barycentre)

$S(O) = O$

c) $h = r_1(O, \frac{2\pi}{3}) o S(O, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}) = h(O, -\frac{1}{2}) = S(O, \frac{1}{2}, \pi)$

4) $M \in \Gamma \Leftrightarrow IM + JM = IC + JC = a$

a) Montrons que $K \in \Gamma$

$IK + JK = IC + JC = a \Rightarrow K \in \Gamma$

b) Construction de Γ

. centre est le milieu $[IJ]$

. les sommets sur l'axe non focal sont K et C car $(KC) = \text{méd}\,[IJ]$

. sommets sur l'axe focal

$(IJ) \cap \mathcal{C}(O, \frac{a}{2})$

Exercice 04

soit $f(x) = \frac{x+1}{e^x} = (x+1)e^{-x}$

1) a) Dressons le T.V de f

$D_f =]-\infty, +\infty[$

$\lim_{-\infty} f(x) = -\infty \cdot +\infty = -\infty$

$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$

$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$

$f'(x) = 0 \iff -x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b) Tracé de $\mathcal{C}$

$\mathcal{C} \cap ox$: $f(x) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

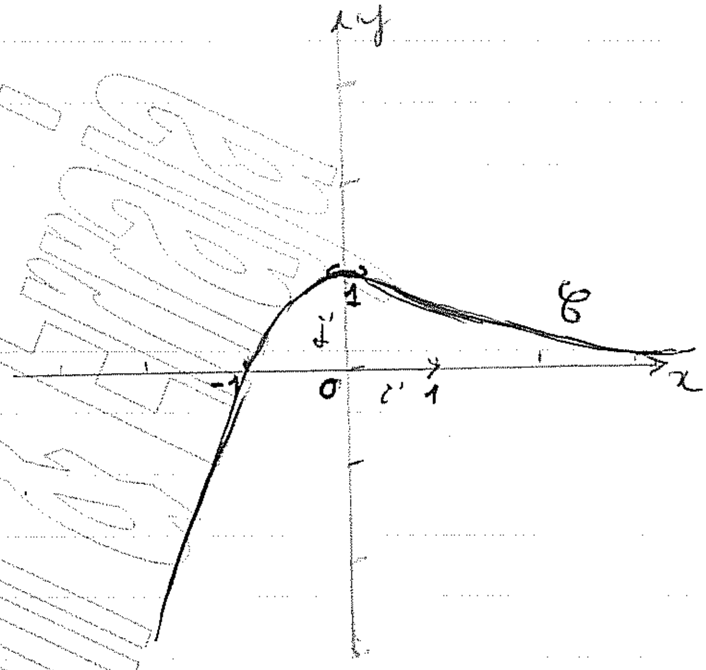
$A(-1, 0)$

$\mathcal{C} \cap oy$: $f(0) = 1 \Rightarrow B(0,1) = \mathcal{C} \cap (oy)$

Branches infinies

- $y = 0$ AH au voisinage de $+\infty$
- $\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \left[\frac{x+1}{x} \cdot e^{-x}\right] = +\infty$

$\mathcal{C}$ admet une b.p de direction (oy)



2) $\forall n \geq 1$ $f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^x} = (1+x)^n e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $F_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(t)\,dt$

Montrons que $\forall n \geq 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$

Faisons une intégration par parties

$F_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} (1+t)^{n+1} e^{-t}\,dt$

on pose $u(t) = (1+t)^{n+1} \longrightarrow u'(t) = (n+1)(1+t)^n$

$v'(t) = e^{-t} \longrightarrow v(t) = -e^{-t}$

$F_{n+1}(x) = \left[-(1+t)^{n+1}e^{-t}\right]_{-1}^{x} + (n+1)\int_{-1}^{x} (1+t)^{n} e^{-t}\,dt$

$F_{n+1}(x) = -f_{n+1}(x) + (n+1)F_n(x)$

3) soit $I_n = F_n(0) = \int_{-1}^{0} f_n(t)dt$

a) Verifions que $\forall n \geq 1$

$I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

de l'egalité

$F_{n+1}(x) = (n+1) F_n(x) - f_{n+1}(x)$

on prend $x = 0$

$F_{n+1}(0) = (n+1) F_n(0) - f_{n+1}(0)$

$I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

b) Montrons que la suite (I_n) est decroissante et positive.

× on rappelle que

$\boxed{\forall x \in [0,1] \quad 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leq 1}$

$-1 \leq t \leq 0$

$0 \leq 1+t \leq 1 \Rightarrow$

$0 \leq (1+t)^{n+1} \leq (1+t)^n$

$0 \leq (1+t)^{n+1} e^{-t} \leq (1+t)^n e^{-t}$

$0 \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^{n+1} e^{-t} dt \leq \int_{-1}^{0} (1+t)^n e^{-t} dt$

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

donc (I_n) est decroissante et positive.

c) Montrons que $\forall n \geq 1$

$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

d'une part: $I_{n+1} \leq I_n$ car $(I_n) \downarrow$

$(n+1) I_n - 1 \leq I_n$

$n I_n + I_n - I_n \leq 1$

$n I_n \leq 1 \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{n}$

d'autre part: (I_n) positive

$0 \leq I_{n+1}$

$0 \leq (n+1) I_n - 1$

$1 \leq (n+1) I_n \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n$

donc $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

on en deduit que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

4) $\forall n \geq 1 \quad U_n = \frac{I_n}{n!}$

a) Montrons que $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$

on rappelle que $(n+1)! = (n+1) n!$

on a: $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

$\Rightarrow \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1) I_n}{(n+1) n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$\Rightarrow U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$

Deduisons que $U_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

on a $U_1 = \frac{I_1}{1!} = I_1 = \int_{-1}^{0} (1+t) e^{-t} dt$

$u(t) = 1+t \longrightarrow u'(t) = 1$

$v'(t) = e^{-t} \longrightarrow v(t) = -e^{-t}$

$U_1 = \left[-(1+t)e^{-t}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-t} dt$

$U_1 = \left[-(1+t)e^{-t}\right]_{-1}^{0} + \left[-e^{-t}\right]_{-1}^{0}$

$U_1 = -1 - 1 + e = e - 2$

on a : $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$ Alors

$$\begin{cases} U_2 = U_1 - \frac{1}{2!} \\ U_3 = U_2 - \frac{1}{3!} \\ U_4 = U_3 - \frac{1}{4!} \\ \vdots \quad \vdots \\ U_n = U_{n-1} - \frac{1}{n!} \end{cases}$$

Par addition

$U_n = U_1 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

$U_n = e - 2 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

$= e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

$= e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \cdots + \frac{1}{n!}\right)$

$U_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

5) Calculons $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

on sait $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{n} = 0$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - U_n$.

$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

Exercice 5

Soit $f(x) = x\ln(x+1)$ de courbe $\mathcal{C}$

1) a) Justifions que :

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty \Rightarrow x = -1$ AV

$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

b) Calculons $f'(x)$

$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

Justifions que

$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$

$x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

x	-1		0		$+\infty$
$\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	
$\frac{x}{x+1}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	

c) Dressons le T.V de f

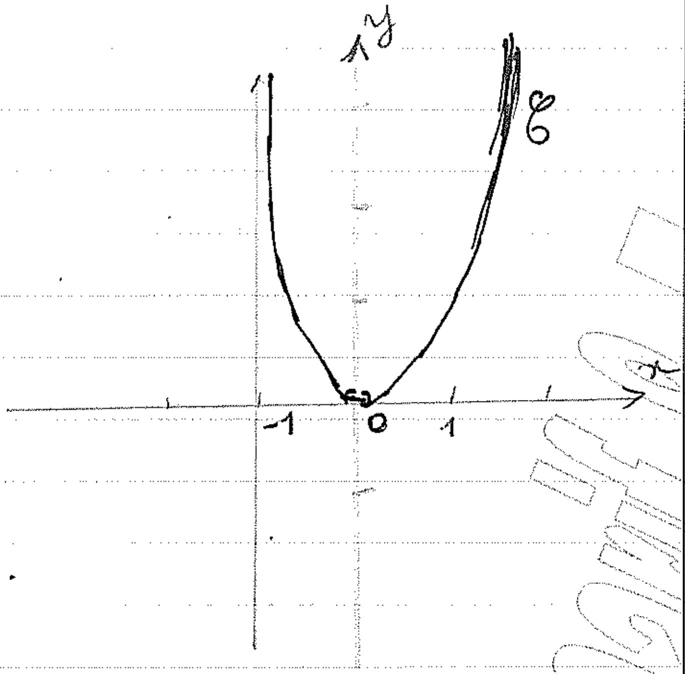
x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) a Tracé de $\mathcal{C}$ de f

Branche infinie

$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x\ln(x+1)}{x} = \lim_{+\infty} \ln(x+1) = +\infty$

$\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy)



b) Calculons $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1+x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + \ln 2$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln 2$$

c) $\mathcal{A} = \int_0^1 \underset{u'}{x}\,\underset{v}{\ln(1+x)}\,dx$

$u'(x) = x \longrightarrow u(x) = \frac{1}{2}x^2$

$v(x) = \ln(1+x) \longrightarrow v'(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4}\ \text{UA}$$

3) $\forall n \geq 1 \quad U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$

a) Montrons que (U_n) est définie

$\forall t \in [0,1] \quad t \longrightarrow t^n \ln(1+t)$ est continue produit de 2 fonctions continues

justifions que $U_1 = \frac{1}{4}$

$$U_1 = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \mathcal{A} = \frac{1}{4}$$

b) Montrons que $\forall n \geq 1 \quad 0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

on a : $0 \leq x \leq 1$

$1 \leq 1+x \leq 2$

$0 \leq \ln(1+x) \leq \ln 2$

$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln 2$

$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \leq \ln 2 \int_0^1 x^n\,dx$

$0 \leq U_n \leq \ln 2\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

car $\lim_{+\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$

4) $\forall n \geq 2$ $\forall x \in [0,1]$ on pose

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n$$

a) justifions que

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

on rappelle :

$$\boxed{1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}}$$

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n$$

$$= 1 + (-x)^1 + (-x)^2 + (-x)^3 + \dots + (-x)^n$$

$$= \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1 - (-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

$$= \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

b) Montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$

$$1 - x + x^2 \dots + (-x)^n = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

integrons entre 0 et 1

$$\int_0^1 1 - x + x^2 + \dots + (-x)^n dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

$$\left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[\ln x\right]_0^1 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

c) Montrons que

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$$

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$$

on pose $u'(x) = x^n \longrightarrow u(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$v = \ln(1+x) \longrightarrow v' = \frac{1}{1+x}$

$$U_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

or $\displaystyle(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = \ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = (-1)^{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$$

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right]$$

5) $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

a) Montrons que

$$\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$1 \leq 1+x \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$$

$$\frac{1}{2}x^{n+1} \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^{n+1}dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^{n+1}dx$$

$$\left[\frac{1}{2(n+2)}x^{n+2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$$

$$\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$$

b) En deduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ln 2$

on remarque

$$V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

or $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

$$V_n = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \ln 2$$

c) Deduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)U_n$

on a : $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right]$$

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - V_n\right]$$

$$(n+1)U_n = \ln 2 - (-1)^{n+1}\left[\ln 2 - V_n\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)U_n = \ln 2$$