Exercice 1

1) $P(2i)=(2i)^3+(1-2i)(2i)^2+(1-2i)(2i)-2i$

$= -8i-4(1-2i)+2i(1-2i)-2i$

$= -8i-4+8i+2i+4-2i=0$

$\therefore P(2i)=0$

	1	$1-2i$	$1-2i$	$-2i$
$2i$	$\downarrow$	$2i$	$2i$	$2i$
	1	1	1	0

$\therefore \forall z\in\mathbb{C},\ P(z)=(z-2i)(z^2+z+1)$

$P(z)=0 \iff (z-2i)(z^2+z+1)=0$

$\iff z=2i$ ou $z^2+z+1=0$

$\Delta=1-4=-3=3i^2=(i\sqrt{3})^2$

$z'=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$z''=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$S_{\mathbb{C}}=\left\{2i,-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$Im(2i)\geq Im\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\geq Im\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore z_0=2i,\ z_1=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) a) On a : $B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soit $M(x;y)$:

$M\in(BC)\iff \det(\vec{BM},\vec{BC})=0$

$\iff \begin{vmatrix} x+1/2 & 0 \\ y-\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=0$

$\iff -\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)=0 \iff x+\frac{1}{2}=0 \iff 2x+1=0$

b) $M\in(BC)\setminus\{B,C\}$

$\iff z=-\dfrac{1}{2}+iy\ /\ y\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Or : $z'=\dfrac{1}{z^2+z+1}=\dfrac{1}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

D'où : $z'=\dfrac{1}{(-\frac{1}{2}+iy+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{(iy)^2+\frac{3}{4}}$

$=\dfrac{1}{-y^2+\frac{3}{4}}\in\mathbb{R}$

Donc M' est sur l'axe des abscisses.

3) a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}z^2+\bar{z}z+\bar{z}}$

$=\dfrac{\bar{z}}{(\bar{z}z)z+\bar{z}z+\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2 z+|z|^2+\bar{z}}$

Donc si $|z|=1$ alors $|z|^2=1$

d'où $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z+1+\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}}{1+z+\bar{z}}$

b) si $z=e^{i\theta}$ alors $\bar{z}=e^{-i\theta}$ et $|z|=1$

Donc $f(z)=\dfrac{e^{-i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

4) a) $M\in\mathcal{C}(O,1)\setminus\{B,C\}\Rightarrow z=e^{i\theta}$ et $\cos\theta\neq-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow z'=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{1+2\cos\theta}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ y'=\dfrac{-\sin\theta}{1+2\cos\theta}\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(1+2\cos\theta)^2}=\dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2} \\ \text{et} \\ (2x'-1)^2=\left(\dfrac{2\cos\theta}{1+2\cos\theta}-1\right)^2=\dfrac{1}{(1+2\cos\theta)^2}\end{cases}$

D'où : $x'^2+y'^2=(2x'-1)^2$

b) $\Gamma : x^2+y^2=(2x-1)^2$

$\iff x^2+y^2=4x^2-4x+1$

$\iff 3x^2-4x-y^2=-1$

$\iff 3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-y^2=-1$

$\iff 3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{9}\right]-y^2=-1$

$\iff 3\left(x-2/3\right)^2-y^2=\dfrac{1}{3}$

$\iff \dfrac{(x-2/3)^2}{1/9}-\dfrac{y^2}{1/3}=1$

Exercice 1 (suite)

4) b) (suite)

$\Gamma : \dfrac{(x-2/3)^2}{(1/3)^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{3}/3)^2} = 1$

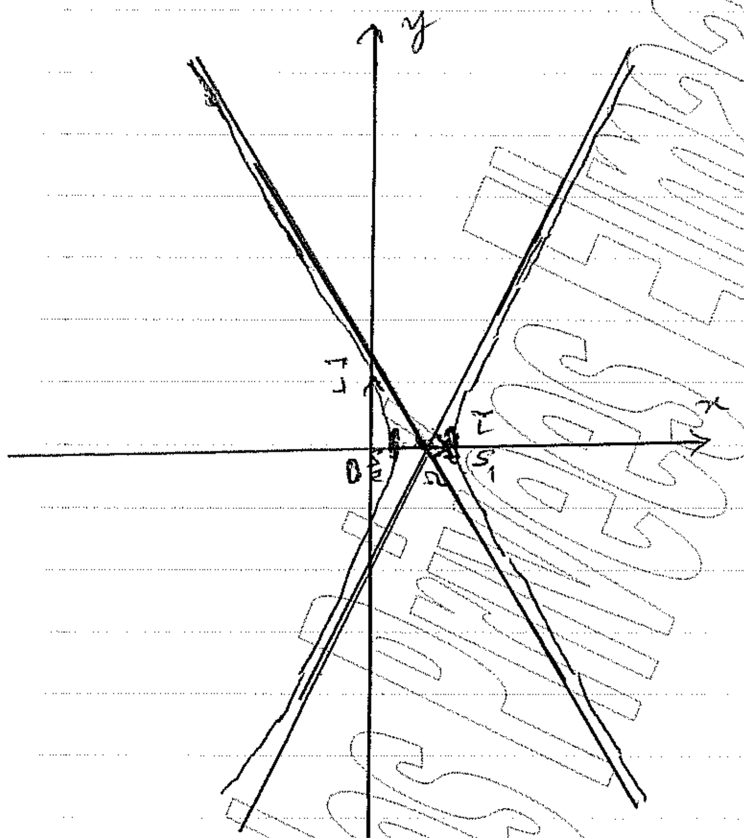
$\therefore \Gamma : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = 1/3$ et $b = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Donc Γ est une hyperbole de centre $\Omega(2/3, 0)$ et de sommets

$S_1 : (\frac{1}{3}+\frac{1}{3}, 0) = (1, 0)$ et

$S_2 : (\frac{2}{3}-\frac{1}{3}, 0) = (\frac{1}{3}, 0)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et d'excentricité

$e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \dfrac{2/3}{1/3} = 2$



Exercice 2 :

1) a) $f(x) = xe^x$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f(-1) = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$

T.V. de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

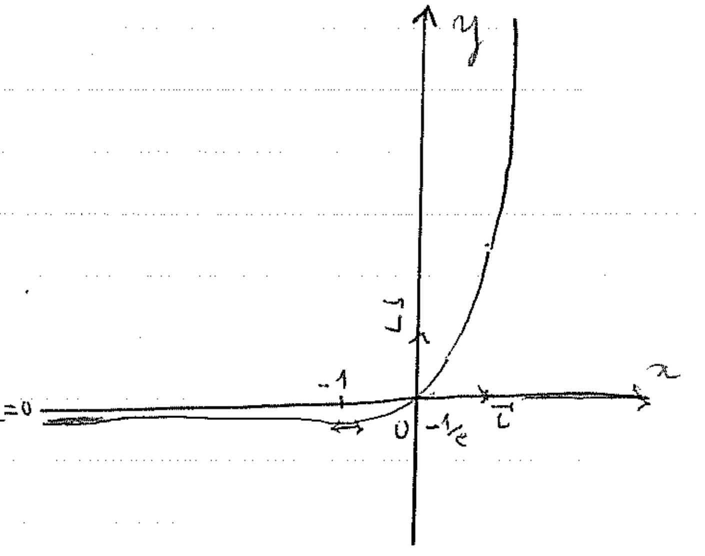
b) $\times$ $y = 0$: A.H. à (C) au voisinage de $-\infty$.

$\times$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\therefore$ (C) admet une B.P. $\parallel (y'y)$ au voisinage de $+\infty$

$\times$ $\mathcal{C} \cap (y'y) : (0, 0)$

$\times$ $\mathcal{C} \cap (x'x) : (0, 0)$



Exercice 2 (suite)

1) (suite)

c) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = (x+1)e^x$

$f''(x) = (x+2)e^x$

$f''(x) - 2f'(x) + f(x)$

$= (x+2)e^x - 2(x+1)e^x + xe^x$

$= (x+2-2x-2+x)e^x = 0$

Donc : f est une solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$

d) L'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est

$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

Or : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$

D'où : $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$\therefore \mathcal{A} = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$

$= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1$

$= [(x-1)e^x]_0^1$

$\boxed{\mathcal{A} = 1\,u.a}$

2) a) $I_1 = (-1)^1 \int_0^1 xe^x\,dx$

Or : $\int_0^1 xe^x\,dx = 1$

D'où $\boxed{I_1 = -1}$

b) $I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

Donc : $|I_n| = |(-1)^n| \cdot \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

$= 1 \times \left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right|$

Or : $\forall x \in [0,1]$, $x^n e^x \geq 0$

D'où : $\int_0^1 x^n e^x\,dx \geq 0$

Donc : $\left|\int_0^1 x^n e^x\,dx\right| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

D'où : $|I_n| = \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e \cdot x^n$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 x^n e^x\,dx \leq e \cdot \int_0^1 x^n\,dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq |I_n| \leq e \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\boxed{\forall n \geq 1,\ \frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}}$

Or : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

D'où d'après le T.G. $\lim_{n\to+\infty} |I_n| = 0$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 x^{n+1} e^x\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$\therefore I_{n+1} = (-1)^{n+1}\left([x^{n+1}e^x]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx\right)$

$= (-1)^{n+1}\left(e - 0 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx\right)$

$= (-1)^{n+1} \cdot e - (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$

$= (-1)^{n+1} e - (-1)(-1)^n (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx$

$= (-1)^{n+1} e + (n+1)(-1)^n \int_0^1 x^n e^x\,dx$

$\therefore \boxed{I_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) I_n,\ \forall n \geq 1}$

Exercice 2 (suite)

3) (suite)

d) $J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1}\,dx$

	1	4	-3	-6
-1	↓	-1	-3	6
	1	3	-6	0

$\therefore J = \int_0^1 \frac{(x^2+3x-6)\cancel{(x+1)}e^x}{\cancel{(x+1)}}\,dx$

$= \int_0^1 (x^2+3x-6)e^x\,dx$

$= \int_0^1 x^2e^x\,dx + 3\int_0^1 xe^x\,dx - 6\int_0^1 e^x\,dx$

$= (-1)^2\int_0^1 x^2e^x\,dx - 3\times(-1)\int_0^1 xe^x\,dx - 6\left[e^x\right]_0^1$

$= I_2 - 3I_1 - 6(e-1)$

Or : $I_1 = -1$ et

$I_2 = (-1)^2e + 2I_1 = e-2$

D'où : $J = (e-2) - 3\times(-1) - 6(e-1)$

$= e - 2 + 3 - 6e + 6$

$\therefore \boxed{J = 7-5e}$

Exercice 3 :

1) a) On a : $f(0) = 0$ et

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} x\left(\ln(x+1) - \ln x\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} \left(x\ln(x+1) - x\ln x\right)$

$= 0 - 0 = 0$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

D'où : f est continue à droite en 0.

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$

f n'est donc pas dérivable à droite en 0 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet, au point d'abscisse, une demi-tangente verticale.

c) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \overset{+\infty}{x}\,\overset{\to 0}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ F.I.

On pose $t = \frac{1}{x}$

Alors $\lim_{x\to +\infty} t = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et

$x = \frac{1}{t}$

$\therefore \lim_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\therefore \boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1}$

Donc : $y = 1$: A.H. à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) $\forall x>0,\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\therefore f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

$\therefore f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{-\cancel{x}-1+\cancel{x}}{x(x+1)^2}$

$\therefore \boxed{f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}}$

Exercice 3 (suite)

$f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$

Donc f' est ↘ sur $]0,+\infty[$

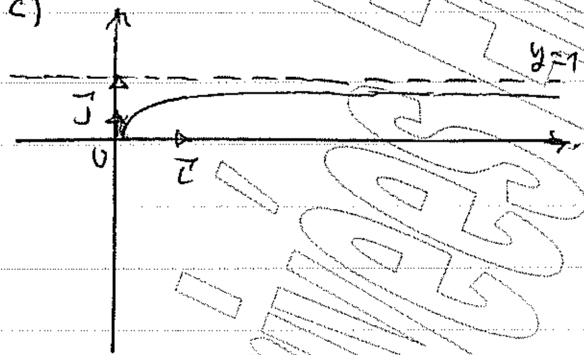
Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right) = 0 - 0 = 0$

D'où : $\boxed{\forall x>0,\ f'(x) > 0}$

b) T.V. de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	0 ↗	1

c)



3) a) Pour que A_n existe il suffit que f_n soit continue sur $[0,1]$.

Montrons que f_n est continue sur $[0,1]$.

- Sur $]0,1]$, $f_n(x) = x^n \ln(1+\frac{1}{x})$ est le produit des deux fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \ln(1+\frac{1}{x})$ continues sur $]0,1]$ d'où f_n est continue sur $]0,1]$.

- Etudions la continuité de f_n à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln(1+\frac{1}{x})$

$= \lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln(\frac{x+1}{x}) = \lim\limits_{x\to0^+} x^n(\ln(x+1) - \ln x)$

$= \lim\limits_{x\to0^+}(x^n\ln(x+1) - x^n\ln x) = 0 - 0 = 0$

$= f_n(0)$

D'où f_n est continue à droite en 0.

Donc : f_n est continue sur $[0,1]$ et l'intégrale $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ existe et cette écriture définit bien une suite numérique (A_n).

b) D'après le T.V. de la fonction f définie dans la question 1) on a :

$\forall x \geq 0,\ 0 \leq f(x) < 1$

D'où : en multipliant par x^{n-1} on a : $\forall x \in [0,1]$

$0 \leq x^{n-1} f(x) \leq x^{n-1}$

c) $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

Or : $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^{n-1} f(x)$

D'où : $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq f_n(x) \leq x^{n-1}$

Donc : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^{n-1}\,dx$

D'où : $0 \leq A_n \leq \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1$

Donc : $\boxed{\forall n \geq 1,\ 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}}$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'où d'après le T.G. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0}$

Exercice 3 (suite)

4) a) $I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 x^n \ln x \, dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

$\therefore I_n(\alpha) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\int_\alpha^1 x^n dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\alpha^1$

$= 0 - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2}$

$\therefore I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}$

b) $\lim_{\alpha\to 0^+} I_n(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln\alpha - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= \lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{\alpha^n}{n+1}(\alpha\ln\alpha) - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$= 0 - 0\times 0 - \frac{1}{(n+1)^2}$

$\therefore \boxed{\lim_{\alpha\to 0^+} I_n(\alpha) = -\frac{1}{(n+1)^2}}$

c) $J_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \ln(x+1) \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \end{cases}$

On obtient $v(x)$ en utilisant une I.P.P

$\therefore J_{n+1} = \left[x^{n+1}\left((x+1)\ln(x+1) - x\right)\right]_0^1$

$- (n+1)\int_0^1 x^n\left((x+1)\ln(x+1) - x\right)dx$

$= 2\ln 2 - 1 - 0 - (n+1)\int_0^1 (x^{n+1} + x^n)\ln(x+1)\,dx$

$+ (n+1)\int_0^1 x^{n+1}dx$

$= 2\ln 2 - (n+1)\int_0^1 \left(x^{n+1}\ln(x+1) + x^n\ln(x+1)\right)dx$

$+ (n+1)\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)\left(\int_0^1 x^{n+1}\ln x\,dx + \int_0^1 x^n\ln(x+1)d\right)$

$(n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 0\right) - 1$

$= 2\ln 2 - (n+1)(J_{n+1} + J_n) + \frac{n+1}{n+2} - 1$

Donc

$J_{n+1} = 2\ln 2 - (n+1)J_{n+1} - (n+1)J_n - \frac{1}{n+2}$

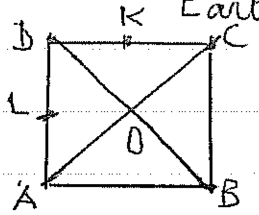
$\therefore J_{n+1} + (n+1)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$

$\therefore (n+2)J_{n+1} = 2\ln 2 - \frac{1}{n+2} - (n+1)J_n$

$\therefore J_{n+1} = \frac{2\ln 2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{n+1}{n+2}J_n$

Exercice 4 : Partie A

1)



2) Comme $BL^2 = BA^2 + AL^2$
$= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$
et $AK^2 = AD^2 + DK^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$
$= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$.

Donc $BL = AK \neq 0$

D'autre part :

$(\vec{AK}, \vec{BL}) \neq 0\ [2\pi]$

Donc : il existe une unique rotation r qui transforme A en B et K en L.

Et comme méd[AB] = (OK) et méd[KL] = (BD) et $(OK) \cap (BD) = \{O\}$, le centre de r est donc le point O.

Un angle de r est $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

3) a) Comme $D \neq B$ et $L \neq O$, il existe donc une unique similitude directe f_1 qui transforme D en L et B en O.

Le rapport de f_1 est

$\frac{OL}{BD} = \frac{a/2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Et un angle de f_1 est :

$(\vec{BD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

b) Comme $f_1(E) = E$ et $f_1(B) = O$

on a donc $(\vec{EB}, \vec{EO}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Or : $(\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

D'où : $(\vec{EB}, \vec{EO}) = (\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{4}\ (\neq 0\ [\pi])$

Donc le point E appartient au cercle circonscrit au triangle OAB c'est-à-dire que E appartient au cercle de diamètre [AB].

De même : Comme $f_1(E) = E$ et $f_1(D) = L$

on a : $(\vec{ED}, \vec{EL}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Or : $(\vec{OD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

D'où : $(\vec{ED}, \vec{EL}) = (\vec{OD}, \vec{OL}) = \frac{\pi}{4}\ (\neq 0\ [\pi])$

Donc le point E appartient au cercle circonscrit au triangle ODL c'est-à-dire que E appartient au cercle de diamètre [OD].

On constate que le point O est commun aux cercles de diamètres [AB] et [OD] mais qu'il n'est pas le centre de f_1 (car $f_1^{-1}(O) = B \neq O$) ; le point E est donc le second point commun à ces deux cercles (autre que O).

Exercice 4 (suite)

3) b) (suite)

Montrons que E est le point d'intersection de (BL) et (AK).

$(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EL}) = (\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EO})+(\overrightarrow{EO},\overrightarrow{EL})$

$= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DL})\ [\pi]$

$= \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4} = 0\ [\pi]$

Donc $\boxed{E\in(BL)}$

De même :

$(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EK}) = (\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EO})+(\overrightarrow{EO},\overrightarrow{EK})$

$= (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO})+(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DK})\ [\pi]$

$= -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = 0\ [\pi]$

Donc : $\boxed{E\in(AK)}$

E est donc le point d'intersection de (BL) et (AK).

4) Comme $f_2(B)=D$ et $f_2(O)=L$, un angle de f_2 est :

$(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{DL}) = (\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DL})$

$= \pi-\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

Et le rapport de f_2 est :

$\frac{DL}{BO} = \frac{a/2}{a\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $f_2\circ f_1$ et $f_1\circ f_2$ sont deux similitudes directes de même rapport et de même angle et transforment le point B en un même point L (car $f_2\circ f_1(B) = f_2(f_1(B)) = f_2(O) = L$ et $f_1\circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$)

Donc $f_1\circ f_2 = f_2\circ f_1$.

Le centre de f_2 est donc celui de f_1 c'est-à-dire le point P.

5) a) $h = f_1\circ f_2$ est la composée de deux similitudes directes dont le produit des rapports est $\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\ (\neq 1)$ et dont la somme des angles est $\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4} = \pi\ [2\pi]$ et ayant même centre E d'où h est une homothétie de centre E et de rapport $-\frac{1}{4}$.

Or : $h(B) = f_1\circ f_2(B) = f_1(f_2(B)) = f_1(D) = L$

D'où : $\overrightarrow{EL} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{EB}$

Donc : $4\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{EB} = \vec{0}$

D'où : $\boxed{E = \mathrm{bar}\begin{vmatrix} B & L \\ 1 & 4\end{vmatrix}}$

b) $E = \mathrm{bar}\begin{vmatrix} B & L \\ 1 & 4\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow E = \mathrm{bar}\begin{vmatrix} B & D & A \\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}$

Or : $B = \mathrm{bar}\begin{vmatrix} A & C & D \\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$

D'où : $E = \mathrm{bar}\begin{vmatrix} A & C & D & D & A \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2\end{vmatrix}$

$\Rightarrow E = \mathrm{bar}\begin{vmatrix} A & C & D \\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow \boxed{E = \mathrm{bar}\begin{vmatrix} A & K \\ 3 & 2\end{vmatrix}}$

Partie B :

1) $r = s_1\circ s_2$ est composée de deux réflexions de plans perpendiculaires dont la droite d'intersection est (AD).

D'où : r est le demi-tour d'axe (AD).

Exercice 4 (suite)

Partie B (suite)

2) $t = S_3 \circ S_4$ est composée de deux réflexions de plans parallèles D'où t est une translation.
Le vecteur de t est : $2\overrightarrow{DA}$.

3) $f = r \circ t$ est composée d'une translation et d'une rotation telles que le vecteur de la translation est un vecteur directeur de l'axe de la rotation.
D'où : f est le vissage d'axe (DA), d'angle π et de vecteur $2\overrightarrow{DA}$.