Exercice 1

(E) : $11x+9y=19$

1) a) $11\times(-4)+9\times 7=-44+63=19$

Donc $(-4,7)$ est une solution particulière de (E).

b) $11x+9y=19$

$\Leftrightarrow 11x+9y=11\times(-4)+9\times 7$

$\Leftrightarrow 11(x+4)=-9(y-7)$ (1)

$\therefore \begin{cases} 11 \mid 9(y-7) \\ \text{et} \\ 11\wedge 9=1 \end{cases}$ d'où d'après Gauss

$11 \mid y-7$

Il existe donc un entier k tel que $y-7=11k$ (2)

Et en remplaçant dans (1) on obtient :

$11(x+4)=-9\times 11k$

$\Leftrightarrow x+4=-9k$ (3)

De (2) et (3) on a :

$\begin{cases} x=-4-9k \\ y=7+11k \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

$\therefore S=\{(-4-9k,7+11k)/k\in\mathbb{Z}\}$

2) On doit avoir :

$\begin{cases} P_1+P_2+P_3=1 \\ P_1\geq 0 \\ P_2\geq 0 \\ P_3\geq 0 \end{cases}$

C'est-à-dire :

$\begin{cases} \dfrac{x-4}{9}+\dfrac{2x-y-8}{9}+\dfrac{8x+10y+2}{9}=1 \\ \dfrac{x-4}{9}\geq 0 \\ \dfrac{2x-y-8}{9}\geq 0 \\ \dfrac{8x+10+2}{9}\geq 0 \end{cases}$ avec $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$

ce qui équivaut à :

$\begin{cases} 11x+9y=19 \quad ((x,y)\in\mathbb{Z}^2) \\ -4-9k-4\geq 0 \\ 2(-4-9k)-(7+11k)-8\geq 0 \\ 8(-4-9k)+10(7+11k)+2\geq 0 \end{cases}$

c'est-à-dire :

$\begin{cases} \begin{cases} x=-4-9k \\ y=7+11k \end{cases}, k\in\mathbb{Z} \\ -9k\geq 8 \\ -29k\geq 23 \\ 38k\geq -40 \end{cases}$

ce qui équivaut à :

$\begin{cases} \begin{cases} x=-4-9k \\ y=7+11k \end{cases}, k\in\mathbb{Z} \\ k\leq -\frac{8}{9} \\ k\leq -\frac{23}{29} \\ k\geq -\frac{40}{38} \end{cases}$

c'est-à-dire

$\begin{cases} k=-1 \\ x=-4-9k=-4+9=5 \\ y=7+11k=7-11=-4 \end{cases}$

Il existe donc un unique couple (x,y) d'entiers tel que ces coordonnées soient acceptables. C'est le couple $(5,-4)$.

Exercice 1 (suite)

2) (suite) b) Comme $x=5$ et $y=-4$

on a donc : $p_1 = \frac{5-4}{9} = \frac{1}{9}$

$p_2 = \frac{2\times5-(-4)-8}{9} = \frac{10+4-8}{9} = \frac{6}{9}$

et $p_3 = \frac{8\times5+10\times(-4)+2}{9} = \frac{40-40+2}{9} = \frac{2}{9}$

x_i	-4	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$

L'espérance mathématique de X est donc :

$$E(X) = -4\times\frac{1}{9}+7\times\frac{6}{9}+8\times\frac{2}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

c) $E(X^2) = (-4)^2\times\frac{1}{9}+(7)^2\times\frac{6}{9}+(8)^2\times\frac{2}{9}$

$= 16\times\frac{1}{9}+49\times\frac{6}{9}+64\times\frac{2}{9}$

$= \frac{16+294+128}{9} = \frac{438}{9} = \frac{146}{3}$

Et $(E(X))^2 = (6)^2 = 36$

La variance de X est donc

$V(X) = E(X^2)-(E(X))^2$

$= \frac{146}{3} - 36 = \frac{146-108}{3} = \boxed{\frac{38}{3}}$

2 bis) a) $(E') : (11-9i)z+(11+9i)\bar{z} = 38$

$\Leftrightarrow (11-9i)z+\overline{(11-9i)z} = 38$

$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Ré}\left((11-9i)z\right) = 38$

$\Leftrightarrow \mathrm{Ré}\left((11-9i)z\right) = 19$

$\Leftrightarrow \mathrm{Ré}\left((11-9i)(x+iy)\right) = 19$

$\Leftrightarrow 11x+9y = 19$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \text{et} \\ y = \frac{19-11x}{9} \end{cases}$

(E') admet donc une infinité de solutions.

Et le lieu géométrique des points $M(x;y)$ est la droite Δ d'équation $11x+9y=19$.

b) Les points $M(x;y)$ de Δ dont les coordonnées sont des entiers relatifs sont ceux dont les coordonnées sont les solutions de l'équation (E) ; c'est-à-dire : $x=-4-9k$ et $y=7+11k$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 2 :

1) $P(z) = z^3+(2-2i)z^2+(-2-8i)z-8+4i$

a) $P(2i) = (2i)^3+(2-2i)(2i)^2+(-2-8i)(2i)-8+4i$

$= -8i-4(2-2i)+2i(-2-8i)-8+4i$

$= -8i-8+8i-4i+16-8+4i = 0$

$\therefore \boxed{P(2i)=0}$

b)

	1	$2-2i$	$-2-8i$	$-8+4i$
$2i$	↓	$2i$	$4i$	$8-4i$
	1	2	$-2-4i$	0

$\therefore \forall z\in\mathbb{C},\ P(z) = (z-2i)(z^2+2z-2-4i)$

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+2z-2-4i)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{z=2i}$ ou $z^2+2z-2-4i=0$

$\Delta' = 1+2+4i = 3+4i = (2+i)^2$

$z_1 = \frac{-1+2+i}{1} = 1+i$

$z_2 = \frac{-1-2-i}{1} = -3-i$

$S_{\mathbb{C}} = \{2i\,;\,1+i\,;\,-3-i\}$

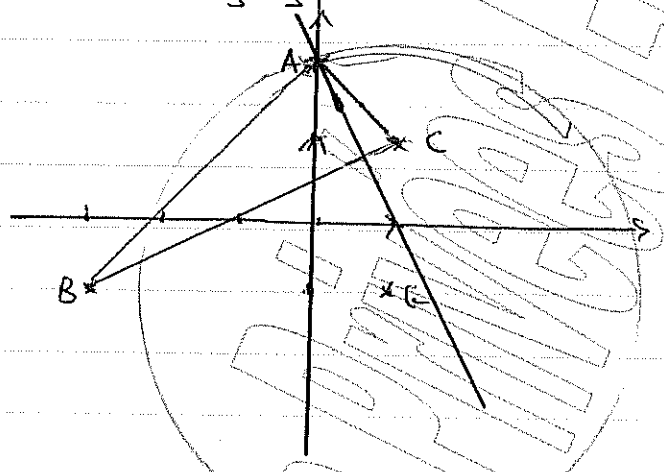
Exercice 2 (suite)

2) $f : z' = \frac{1}{3}iz + \frac{2}{3} + 2i$

a) Comme l'expression complexe de f dans le repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ donc f est une similitude directe de rapport $|a| = \left|\frac{1}{3}i\right| = \frac{1}{3}$, d'angle $\arg(a) = \arg\left(\frac{1}{3}i\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et comme $a \neq 1$ le centre de f est le point A d'affixe

$$z_A = \frac{b}{1-a} = \frac{2/3 + 2i}{1 - \frac{1}{3}i} = \frac{2/3(1+3i)}{1/3(3-i)} = 2i$$

b) $z_C = \frac{1}{3}iz_B + \frac{2}{3} + 2i = \frac{1}{3}i(-3-i) + \frac{2}{3} + 2i$
$= -i + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 2i = 1+i$



$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |-3-i-2i|^2 = |-3-3i|^2 = 18$
$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |1+i-2i|^2 = |1-i|^2 = 2$
$BC^2 = |z_C - z_B|^2 = |1+i+3+i|^2 = |4+2i|^2 = 20$
$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$
$\therefore$ Le triangle ABC est rectangle (en A)

c) $G = \text{bar}\{(A,-4),(B,1),(C,6)\}$

$$\Leftrightarrow z_G = \frac{-4z_A + z_B + 6z_C}{-4+1+6} = \frac{-4\times 2i - 3 - i + 6(1+i)}{3} = \frac{-8i-3-i+6+6i}{3}$$
$$= \frac{3-3i}{3} = 1-i$$

Nous avons vu en b) que le triangle ABC est rectangle en A.

D'autre part :

$$(\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_G}{z_C - z_G}\right) = \arg\left(\frac{-3-i-1+i}{1+i-1+i}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{-4}{2i}\right) = \arg(-4) - \arg(2i) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

D'où le triangle GBC est rectangle en G.

Et comme les triangles ABC et GBC sont rectangles et de même hypothénuse $[BC]$, les points A, B, C et G sont cocycliques.

3) a) On pose $\varphi_1(M) = -4MA^2 + MB^2 + 6MC^2$.
Alors comme $-4+1+6 = 3 \neq 0$ et comme $G = \text{bar}\{(A,-4),(B,1),(C,6)\}$ on a donc pour tout point M du plan :

$\varphi_1(M) = 3MG^2 + \varphi_1(G)$
$\varphi_1(G) = -4GA^2 + GB^2 + 6GC^2$
$\varphi_1(G) = -4|z_A - z_G|^2 + |z_B - z_G|^2 + 6|z_C - z_G|^2$
$|z_A - z_G|^2 = |2i-1+i|^2 = |-1+3i|^2 = 1+9 = 10$
$|z_B - z_G|^2 = |-3-i-1+i|^2 = |-4|^2 = 16$
$|z_C - z_G|^2 = |1+i-1+i|^2 = |2i|^2 = 4$
$\therefore \varphi_1(G) = -4\times 10 + 16 + 6\times 4 = 0$
$\therefore \forall M,\ \varphi_1(M) = 3MG^2 + 0 = 3MG^2$
$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \varphi_1(M) = 30 \Leftrightarrow 3MG^2 = 30$
$\Leftrightarrow MG^2 = 10 \Leftrightarrow MG = \sqrt{10}$.
$\therefore \Gamma_1$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{10}$

Exercice 2 (suite)

3) a) (suite)

On peut constater que $GA^2 = 10$

donc $A \in \Gamma_1$

Γ_1 est donc le cercle de centre G passant par A.

b) On pose $\varphi_2(M) = MB^2 - MC^2$.

Alors comme $1-1=0$ le système $\{(B,1),(C,-1)\}$ n'a pas de barycentre.

$$\varphi_2(M) = \vec{MB}^2 - \vec{MC}^2 = (\vec{MB}-\vec{MC})\cdot(\vec{MB}+\vec{MC})$$
$$= \vec{CB}\cdot(\vec{MB}+\vec{MC})$$

Soit I le milieu de [BC].

Alors : $\forall M,\ \vec{MB}+\vec{MC} = 2\vec{MI}$

$\therefore \varphi_2(M) = \vec{CB}\cdot 2\vec{MI} = 2\vec{CB}\cdot\vec{MI}$

Et comme I est le milieu de [BC]

on a donc $\vec{CB} = 2\vec{CI}$ d'où

$\varphi_2(M) = 4\vec{CI}\cdot\vec{MI} = 4\vec{IC}\cdot\vec{IM}$

$M\in\Gamma_2 \iff \varphi_2(M) = 16 \iff 4\vec{IC}\cdot\vec{IM} = 16$

$\iff \vec{IC}\cdot\vec{IM} = 4$

Γ_2 est donc la droite $\perp (IC)=(BC)$

et passant par le point H

défini par $\vec{IH} = \left(\frac{4}{\|\vec{IC}\|^2}\right)\vec{IC}$

Or : $\|\vec{IC}\|^2 = \frac{1}{4}\|\vec{BC}\|^2 = \frac{1}{4}\times 20 = 5$

D'où : $\vec{IH} = \frac{4}{5}\vec{IC}$

On peut constater que

$\varphi_2(A) = BA^2 - AC^2 = 18 - 2 = 16$

D'où $A \in \Gamma_2$

Γ_2 est donc la droite passant par A et perpendiculaire à (BC)

Exercice 3 :

1) $\forall x\in]0,+\infty[,\ g(x) = -x^2 - \ln x$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2-\ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(-x^2-\ln x) = -\infty$

$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0,\ \forall x\in]0,+\infty[$

T.V. de g

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	
$g(x)$	||	$+\infty \searrow$	$-\infty$

b) Comme g est continue et strictement monotone sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et comme elle change de signe, l'équation $g(x)=0$ admet donc une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

Et comme $g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e^2}+1 = \frac{e^2-1}{e^2} > 0$

et $g(1) = -1 < 0$

on a donc : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	

2) $\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x) = -x+1+\frac{1}{x}(1+\ln x)$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\Big(-x+1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\underbrace{(1+\ln x)}_{-\infty}\Big) = -\infty$

$x=0$: A.V. à $\mathcal{C}_f$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)-(1-x)) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x+\cancel{1}+\frac{1}{x}(1+\ln x)\cancel{-1+x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = 0+0 = 0$

$y = 1-x$: A.O. à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

c) $f'(x) = -1 + \dfrac{\frac{1}{x}\times x - (1+\ln x)}{x^2}$

$= -1 + \dfrac{1-1-\ln x}{x^2} = -1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$

$= \dfrac{-x^2-\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

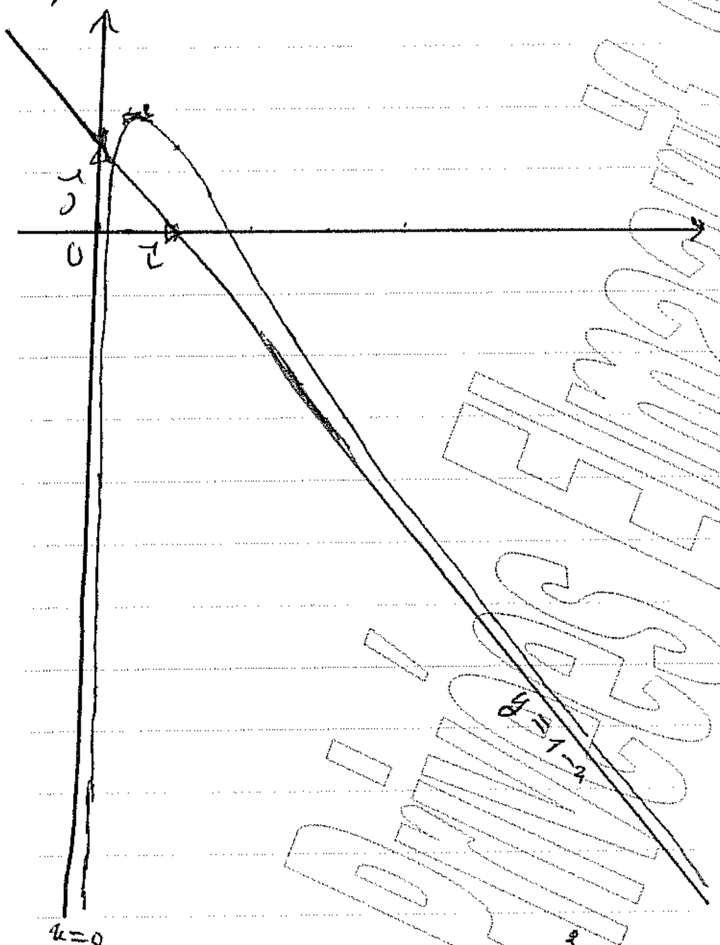
Exercice 3 (suite)

2) c) (suite)

T. V. de f_1

x	0		α		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f_1(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

d)



3) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f_m(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x+1+\frac{m^2}{x}(1+\ln x-\ln m)\right) = -\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_m(x)-(1-x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{m^2}{x}(1+\ln x-\ln m) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{m}{x}+\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln m}{x}\right)=0$

Toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ admettent donc les mêmes asymptotes $x=0$ et $y=1-x$ et qui se coupent en $G(0,1)$.

b) Une homothétie h de centre G et de rapport k transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_m$ ssi

$M(x,y)\in\mathcal{C}_1 \Leftrightarrow h(M)=M'(x',y')\in\mathcal{C}_m$

c'est-à-dire

$f_1(x)=y \Leftrightarrow f_m(x')=y'$

Or : $h(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'}=k\overrightarrow{GM}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\ y'-1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\ y-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=kx\\ y'=ky-k+1\end{cases}$

D'où : on doit avoir

$f_1(x)=y \Leftrightarrow f_m(kx)=ky+1-k$

c'est-à-dire

$f_m(kx)=kf_1(x)-k+1$

c'est-à-dire

$-kx+1+\frac{m^2}{kx}(1+\ln(kx)-\ln m)$
$=k\left(-x+1+\frac{1}{x}(1+\ln x)\right)-k+1$

ce qui équivaut à :

$-kx+1+\frac{m^2}{kx}(1+\ln x+\ln k-\ln m)$
$=-kx+k+\frac{k}{x}(1+\ln x)-k+1$

c'est-à-dire :

$\frac{m^2}{kx}(1+\ln x-\ln k+\ln m)=\frac{k}{x}(1+\ln x)$

D'où par identification :

$\begin{cases}k^2=m^2\\ \text{et}\\ \ln k=\ln m\end{cases}$ donc $\boxed{k=m}$

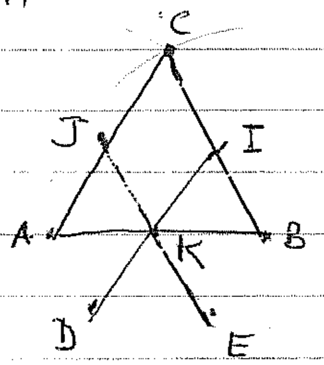
$\mathcal{C}_m$ est donc l'image de $\mathcal{C}_1$ par l'homothétie h_m de centre G et de rapport m.

c) T. V. de f_m :

x	0		$m\alpha$		$+\infty$
$f_m'(x)$	‖		0		
$f_m(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f_m(m\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 4 :

1) a)



b) Comme $AC = BA \neq 0$ et comme $\vec{AC} \neq \vec{BA}$ il existe une unique rotation r_1 qui transforme A en B et C en A.

c) Un angle de r_1 est

$(\vec{CA}, \vec{AB}) = (\vec{CA}, \vec{AC}) + (\vec{AC}, \vec{AB})$

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$

Et comme méd[AB] $\cap$ méd[CA] $= \{O\}$ le centre de r_1 est O.

2) $r_1 \circ r_2(B) = r_1(r_2(B)) = r_1(C) = A$

Or : $r_1 \circ r_2$ est une symétrie centrale (car $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$)

D'où le centre de $r_1 \circ r_2$ est le milieu K de [AB].

3) a) Comme $AJ = KE \neq 0$ il existe un unique antidéplacement g tel que $g(A) = K$ et $g(J) = E$

b) Comme méd[AK] = (JD) et méd[JE] $\neq$ méd[AK] (car $J \notin$ méd[JE])

l'antidéplacement g n'est pas une réflexion d'où g est une symétrie glissante.

Et comme $g(A) = K$ et $g(J) = E$ et comme le triangle AJD vérifie $\begin{cases} AD = AJ \\ \text{et} \\ (\vec{AJ}, \vec{AD}) = -\frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$

donc $g(D)$ est le point D' vérifiant $\begin{cases} KD' = KE \\ (\vec{KE}, \vec{KD'}) = \frac{2\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$

D'où $\boxed{g(D) = I}$.

L'axe de g passe donc par le milieu K de [DI] et par le milieu de [AK], d'où l'axe de g est la droite (AB).

Et comme $A \in (AB)$ et $g(A) = K$ le vecteur de g est $\vec{AK}$.

La forme réduite de g est donc

$g = t_{\vec{AK}} \circ S_{AB} = S_{(AB)} \circ t_{\vec{AK}}$

4. a) Comme $B \neq C$ et $I \neq J$ il existe une unique similitude directe S_1 telle que $S_1(B) = I$ et $S_1(C) = J$

b) Le rapport de S_1 est $\frac{IJ}{BC} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$ et un angle de S_1 est $(\vec{BC}, \vec{IJ}) = \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$.

Pour justifier que O est le centre de S_1 il suffit de montrer que O est invariant par S_1.

Exercice 4 (suite)

4) a) (suite)

Montrons que O est invariant par S_1.

- Méthode 1 :

Comme $\begin{cases} OC = OB \\ \text{et} \\ (\vec{OB},\vec{OC}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

l'image par S_1 de O est le point O' tel que

$\begin{cases} O'J = O'I \\ \text{et} \\ (\vec{O'I},\vec{O'J}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

D'où $S_1(O) = O$

- Méthode 2 :

Comme $S_1(B) = I$ et $S_1(C) = J$ et comme le triangle ABC est équilatéral direct, l'image par S_1 du point A est le point A' tel que le triangle A'IJ est équilatéral direct d'où

$S_1(A) = K$

Donc l'image par S_1 du centre du triangle ABC est le centre du triangle KIJ d'où $S_1(O) = O$.

5) a) $\vec{BM} = \frac{x}{a}\vec{BC} \Leftrightarrow M = bar \left| \begin{matrix} B \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} C \\ x \end{matrix}$

De même $N = bar \left| \begin{matrix} C \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} A \\ x \end{matrix}$

et $P = bar \left| \begin{matrix} A \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} B \\ x \end{matrix}$

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Alors : $r(B) = C$, $r(C) = A$ et $r(A) = B$

Donc

$r(M) = r\left(bar \left| \begin{matrix} B \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} C \\ x \end{matrix}\right) = bar \left| \begin{matrix} r(B) \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} r(C) \\ x \end{matrix}$

$= bar \left| \begin{matrix} C \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} A \\ x \end{matrix} = N$

$r(N) = r\left(bar \left| \begin{matrix} C \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} A \\ x \end{matrix}\right) = bar \left| \begin{matrix} r(C) \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} r(A) \\ x \end{matrix}$

$= bar \left| \begin{matrix} A \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} B \\ x \end{matrix} = P$

$r(P) = r\left(bar \left| \begin{matrix} A \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} B \\ x \end{matrix}\right) = bar \left| \begin{matrix} r(A) \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} r(B) \\ x \end{matrix}$

$= bar \left| \begin{matrix} B \\ a-x \end{matrix} \right| \begin{matrix} C \\ x \end{matrix} = M$

D'où $\begin{cases} OP = ON = OM \\ (\vec{OM},\vec{ON}) = (\vec{ON},\vec{OP}) = (\vec{OP},\vec{OM}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

Donc MNP est équilatéral de centre O.

b) $\begin{cases} (\vec{OM},\vec{OH}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \text{et} \\ \frac{OH}{OM} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$

D'où H est l'image de M par la similitude directe S_1 de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Donc lorsque M décrit [BC] le point H décrit $S_1([BC]) = [IJ]$.

c) Comme $M \neq N$ et $B \neq C$ il existe une unique similitude directe S_2 telle que $S_2(B) = M$ et $S_2(C) = N$

Or ; ABC et PMN sont équilatéraux directs on a donc $S_2(A) = P$

Donc S_2 transforme (A, B, C) en (P, M, N).

$S_2(O) = S_2\left(bar \left| \begin{matrix} A \\ 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} B \\ 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} C \\ 1 \end{matrix} \right.\right)$

$= bar \left| \begin{matrix} S_2(A) \\ 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} S_2(B) \\ 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} S_2(C) \\ 1 \end{matrix} \right.$

$= bar \left| \begin{matrix} P \\ 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} M \\ 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} N \\ 1 \end{matrix} \right. = O$ d'où le centre de S_2 est O.

Exercice 4 (suite)

5) (suite)

d) $\lambda = \frac{OM}{OB}$ est minimal lorsque OM est minimale c'est-à-dire lorsque M est le projeté orthogonal de O sur (BC), c'est-à-dire lorsque M = I.

Or l'aire de MNE est le produit de celle de BCA par λ^2 d'où cette aire est minimale lorsque λ est minimal c'est-à-dire lorsque M = I.

Exercice 5 :

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x - x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0}}$

$= 1$

$y=1$: A.H. à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x - x} = 0$

$y=0$: A.H. à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$

c) $f'(x) = \frac{e^x(e^x-x) - e^x(x-1)}{(e^x-x)^2}$

$\therefore f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$ et $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$f(1) = \frac{e}{e-1}$

T.V. de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

2) $A = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

(car $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

Or : d'après le T.V. de f :

$\forall x \in [0,1]$, $1 \le f(x) \le \frac{e}{e-1}$ (car $f(0)=1$)

D'où : $\int_0^1 dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 \frac{e}{e-1}\,dx$

Donc : $1 \le A \le \frac{e}{e-1}$

3) a) $I_1 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$\therefore I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \left[-e^{-x}\right]_0^1$

$= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^1 = -2e^{-1} + 1$

Exercice 5 (suite)

3) (suite)

b) $I_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow$

$-n \leq -nx \leq 0 \Rightarrow e^{-n} \leq e^{-nx} \leq 1$

$\Rightarrow 0 < e^{-nx} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq x^n e^{-nx} \leq x^n$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^{-nx} dx \leq \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

Or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

D'où : d'après le T.G :

$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

4) a) $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$

$= 1 + \int_0^1 x e^{-x} dx + \dots + \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$

$= \int_0^1 dx + \int_0^1 x e^{-x} dx + \dots + \int_0^1 (xe^{-x})^n dx$

$= \int_0^1 (1 + (xe^{-x}) + (xe^{-x})^2 + \dots + (xe^{-x})^n) dx$

$= \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

(somme partielle d'une S.G)

b) $A - S_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x - x} dx - \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x(1 - xe^{-x})} dx - \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{1 - xe^{-x}} dx - \int_0^1 \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 \frac{1 - 1 + (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

c) $A - S_n = \int_0^1 \frac{(xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}} dx$

$= \int_0^1 (xe^{-x})^{n+1} f(x) dx$

$= \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$

Or :

$1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$ (1)

$0 < e^{-(n+1)} \leq e^{-(n+1)x} \leq 1$ (2)

D'où : en multipliant (1) par (2) membre à membre on a :

$0 \leq e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{e}{e-1} < 2$

Donc :

$0 \leq e^{-(n+1)x} f(x) \leq 2$

Et en multipliant par x^{n+1} on a :

$0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq 2x^{n+1}$

D'où :

$0 \leq \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \int_0^1 2x^{n+1} dx$

Donc

$0 \leq A - S_n \leq \left[\frac{2x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$

D'où :

$0 \leq A - S_n \leq \frac{2}{n+2}$

Or : $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n+2} = 0$

D'où : $\lim_{n \to +\infty} (A - S_n) = 0$

Donc : $\lim_{n \to +\infty} S_n = A$

d) $\frac{2}{n_0+2} < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{n_0+2}{2} \geq 100$

$\Leftrightarrow n_0 + 2 \geq 200 \Leftrightarrow n_0 \geq 198.$