Exercice 1

1- a) $25 = 9\times2+7$

$9 = 7\times1+2$

$7 = 2\times3+1$

$* \; 1 = 7-2\times3$
$= 7-(9-7\times1)\times3$
$= 7-9\times3+7\times3$
$= 7\times4-9\times3$
$= (25-9\times2)\times4-9\times3$
$= 25\times4+9\times(-11)$

Donc $(u,v)=(4,-11)$

$25u+9v=1$

$\Leftrightarrow 25u-9(-v)=1$

$\Leftrightarrow 25(5u)-9(-5v)=5$

D'où $(x_0,y_0)=(5\times4,-5\times-11)$
$=(20,55)$

est une solution particulière de (E)

b) $25x-9y=25\times20-9\times55$

$\Leftrightarrow 25x-25\times20=9y-9\times55$

$\Leftrightarrow 25(x-20)=9(y-55)$

$25\wedge9=1 \Rightarrow 9/x-20$

$\Rightarrow x-20=9k$

$\Leftrightarrow x=20+9k$

En remplaçant x par $20+9k$ on a

$25\times\cancel{9}k=\cancel{9}(y-55)$

$\Rightarrow y=25k+55$

Donc $S:\begin{cases}x=20+9k\\ y=55+25k\end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$

2- a) $d=P.G.C.D(x,y)$

$\Rightarrow d/x$ et d/y

$\Rightarrow d/(25x-9y)=5$

$\Rightarrow d/5$

$\Rightarrow d$ est diviseur positif de $5 \Rightarrow d\in\{1,5\}$

b) x et y sont premiers entre eux si $d=1$ c'est à dire si x n'est pas divisible par 5, ce qui est le cas si k n'est pas multiple de 5

c) (x^2,y^2) est une solution de (E) si

$25x^2-9y^2=5$

$\Leftrightarrow (5x-3y)(5x+3y)=5$

$\Leftrightarrow (5x-3y)/5 \Rightarrow$

$\begin{cases}5x-3y=5\\5x+3y=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}5x-3y=1\\5x+3y=5\end{cases}$

$\Rightarrow 10x=6 \Rightarrow x=0{,}6$

Impossible car $x\in\mathbb{Z}$

Exercice 2

1°/ $P(z)=z^3-(9-i)z^2+(28-5i)z-32+4i$

a) $P(4)=4^3-(9-i)\times 16+4(28-5i)-32+4i$

$=64-144+16i+112-20i-32+4i$

$=0$

$P(z)=(z-4)(z^2+az+b)$

En utilisant le tableau d'HORNER :

	1	$-9+i$	$28-5i$	$-32+4i$
4		4	$-20+4i$	$32-4i$
	1	$-5+i$	$8-i$	0

$P(z)=(z-4)(z^2+(-5+i)z+8-i)$

b) $P(z)=0 \iff z-4=0 \iff z=4$

ou $z^2+(-5+i)z+8-i=0$

$\Delta=(-5+i)^2-4\times 1(8-i)$

$=25-10i-1-32+4i$

$=-8-6i=(1-3i)^2$

$z_1=\dfrac{5-i+1-3i}{2}=3-2i$

$z_2=\dfrac{5-i-1+3i}{2}=2+i$

$S=\{4,\ 3-2i,\ 2+i\}$

2°/ $A(4)$, $B(2+i)$, $C(3-2i)$

a) $S : M(z) \longrightarrow M'(z')$ / $z'=az+b$ / $a,b\in\mathbb{C}$

$S : C \longrightarrow C \iff z_C=az_C+b$ (1)

$S : A \longrightarrow B \iff z_B=az_A+b$ (2)

(1) − (2) donne $z_C-z_B=a(z_C-z_A)$

$\Rightarrow a=\dfrac{z_C-z_B}{z_C-z_A}=\dfrac{3-2i-2-i}{3-2i-4}$

$=\dfrac{1-3i}{-1-2i}=\dfrac{(1-3i)(-1+2i)}{1+4}$

$=\dfrac{5+5i}{5}=1+i$

$b=z_C-az_C=(1-a)z_C$

$=(1-1-i)(3-2i)$

$=-3i-2$

Donc

$S : M(z) \longrightarrow M'(z')$ /

$z'=(1+i)z-2-3i$

b) le rapport : $k=|1+i|=\sqrt{2}$

l'angle $\theta=\operatorname{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

3°/ $\varphi(z)=z^2-(5-i)z+8-i$

a) $\varphi(z)=(x+iy)^2-(5-i)(x+iy)+8-i$

$=x^2-y^2+2xyi-5x-5iy-xi-y$
$+8-i$

$\Rightarrow \varphi(z)=x^2-y^2-5x-y+8$
$+i(2xy-5y-x-1)$

$\Gamma=\{M\in P \,/\, \varphi(z)$ est imaginaire pur non nul $\}$

$\iff \operatorname{Re}(\varphi(z))=0$

$\iff x^2-y^2-5x-y+8=0$

$\iff (x-\frac{5}{2})^2-(y+\frac{1}{2})^2-\frac{24}{4}+8=0$

$\iff (x-\frac{5}{2})^2-(y+\frac{1}{2})^2=2$

$\iff -\dfrac{(x-\frac{5}{2})^2}{(\sqrt{2})^2}+\dfrac{(y+\frac{1}{2})^2}{(\sqrt{2})^2}=1$

Dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\Omega(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$; Γ a pour équation : $\frac{-X^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

D'où Γ est une hyperbole de centre Ω et de

b) sommets :

$B(0, \sqrt{2})$ dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

et $B'(0, -\sqrt{2})$

Mais dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on a $B(\frac{5}{2}, \sqrt{2} - \frac{1}{2})$ et $B'(\frac{5}{2}; -\sqrt{2} - \frac{1}{2})$

Les asymptotes Δ et Δ' ont pour équations dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$\Delta : Y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} X = X$ et

$\Delta' : Y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} X = -X$

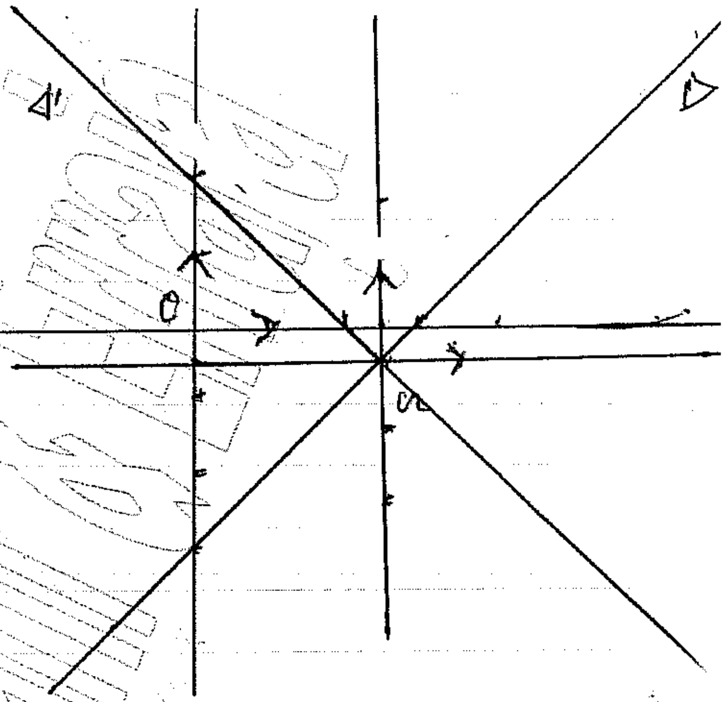
et Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

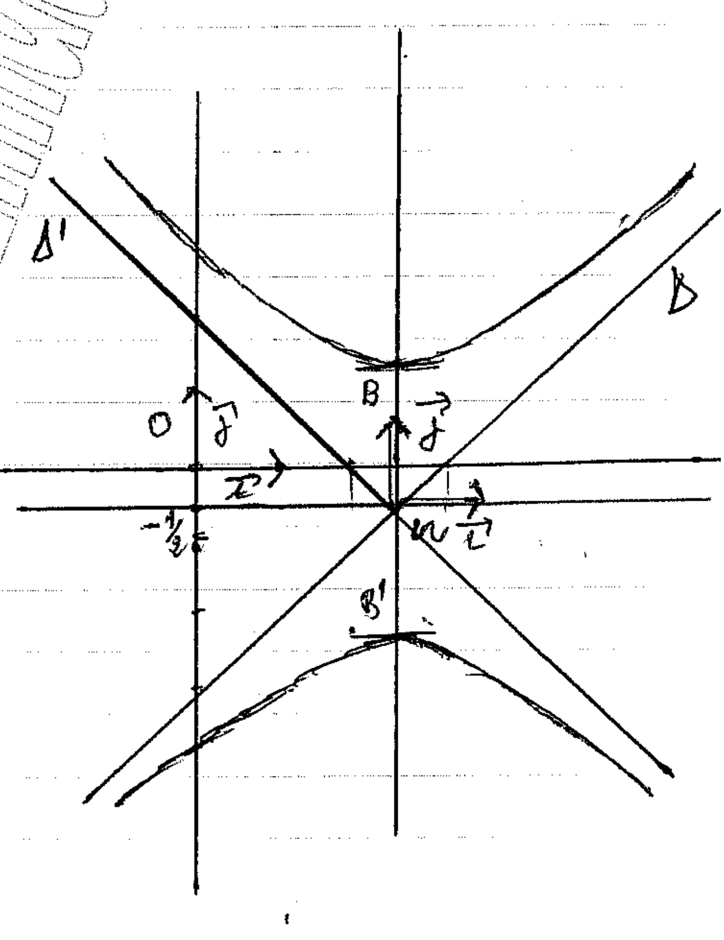
on a : $y + \frac{1}{2} = x - \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta : y = x - 3$

et $y + \frac{1}{2} = -x + \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \Delta' : y = -x + 2$





Exercice 3

1°/ a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3e^x - xe^x) = 0$

$\Leftrightarrow$ la droite (ox) : $y = 0$ est une A.H de $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3-x)e^x = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(3-x)e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x} - 1\right)e^x = -\infty$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (oy)

b) $f'(x) = -1e^x + (3-x)e^x = (-1+3-x)e^x = (2-x)e^x$

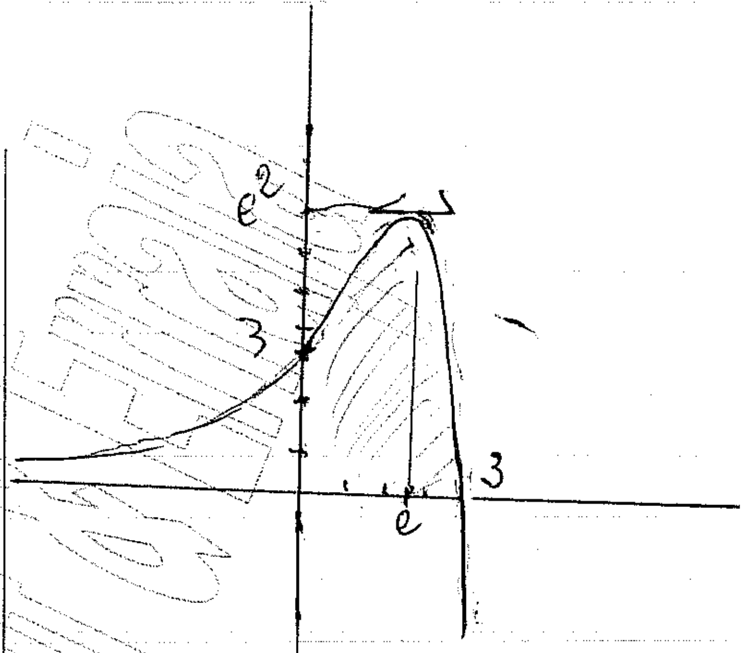
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

T.V de f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

c) $\mathcal{C}_f \cap (ox)$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x)e^x = 0$
$\Leftrightarrow 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$\mathcal{C}_f \cap (ox) = \{(3,0)\}$;
$\mathcal{C}_f \cap (oy) = \{(0,3)\}$



d) $f'(x) - f(x) = (2-x)e^x - (3-x)e^x = (2-x-3+x)e^x = -e^x$

$\Leftrightarrow$ f est solution de l'équation différentielle $y' - y = -e^x$

Calcul de l'aire $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (f'(x) + e^x)\,d$$
$$= \left[f(x) + e^x \right]_0^3 = (e^3 - 4)\,u.a$$

2°/ a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{3^n}$

$= \frac{3^n \times 3 \times n!}{(n+1)\,n!\,.\,3^n} = \frac{3}{n+1}$

or $n \geq 3 \Leftrightarrow n + 1 \geq 4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3}{4}$

b) On a $0 \leq \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{3}{4}$ pour tout $k \geq 3$

* $k=3$ on a $0 \leq \frac{u_4}{u_3} \leq \frac{3}{4}$

$k=4$ ... $0 \leq \frac{u_5}{u_4} \leq \frac{3}{4}$

$k=5$ ... $0 \leq \frac{u_6}{u_5} \leq \frac{3}{4}$

⋮

$k=n-2$ ... $0 \leq \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leq \frac{3}{4}$

$k=n-1$ ... $0 \leq \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{3}{4}$

En multipliant les membres entre eux et en simplifiant on aura :

$$0 \leq \frac{u_n}{u_3} \leq \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{3}{4}}_{(n-4+1)\text{ fois}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{u_n}{u_3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$$

* Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$ car $0 < \frac{3}{4} < 1$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (T. G)

3) $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!}$

a) $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^3 (3-x)e^x \, dx$

$= \int_0^3 f(x)\, dx = A = e^3 - 4$

b) on a $0 \leq x \leq 3$

$\Leftrightarrow -3 \leq -x \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq 3-x \leq 3$

$\Rightarrow 0 \leq (3-x)^n \leq 3^n$

$\Rightarrow 0 \leq (3-x)^n e^x \leq 3^n e^x$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx \leq \int_0^3 3^n e^x \, dx$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x \, dx \leq \frac{3^n}{n!}\int_0^3 e^x \, dx$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq u_n \left[e^x\right]_0^3$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq (e^3-1)u_n$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (e^3-1)u_n = (e^3-1)\times 0 = 0$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

c) $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^3 (3-x)^{n+1} e^x dx$

$u(x) = (3-x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = -(n+1)(3-x)^n$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[\left[e^x(3-x)^{n+1}\right]_0^3 - \int_0^3 -(n+1)(3-x)^n e^x dx\right]$

$= \frac{1}{(n+1)!}\left[-3^{n+1} + (n+1)\int_0^3 (3-x)^n e^x dx\right]$

$= -\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)}{(n+1)\, n!}\int_0^3 (3-x)^n e^x dx$

$\Leftrightarrow I_{n+1} = -U_{n+1} + I_n$

d) Demontrons par recurrence que $\forall n \geq 1$;

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^n}{n!} + I_n$

* verifions pour $n = 1$

pour $n = 1$ on a

$\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + I_1 = 1 + 3 + e^3 - 4$

$= e^3$

vraie pour $n = 1$

* on suppose que

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^n}{n!} + I_n$

* on demontre que

$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^n}{n!} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

on a :

$\underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^n}{2^n}}_{(e^3 - I_n)} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

$(e^3 - I_n) + U_{n+1} + I_n - U_{n+1}$

$= e^3$

<u>Conclusion</u>

$\forall n \geq 1$ on a

$e^3 = \underbrace{1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \cdots + \frac{3^n}{n!}}_{S_n} + I_n$

on a :

$e^3 = S_n + I_n$

$\Leftrightarrow S_n = e^3 - I_n$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} e^3 - I_n$

$= e^3 - 0$

$= e^3$

Exercice 4

$$\begin{cases} g(x) = 1+x^3-3x^3\ln x \text{ si } x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$$

1°/ a) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1+x^3-3(x^3\ln x)$

$= 1+0-3\times 0 = 1 = g(0)$

Donc g est continue en 0^+

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{x^3}+1-3\ln x\right)$

$= +\infty(0+1-\infty) = -\infty$

b) $g'(x) = 3x^2 - \left(9x^2\ln x + 3x^3\times\frac{1}{x}\right)$

$= \cancel{3x^2} - 9x^2\ln x - \cancel{3x^2}$

$= -9x^2\ln x$

T.V de g

x	0		1		$+\infty$
$-9x^2$	0	$-$		$-$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

c) g est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et change de signe, donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha > 1$

Comme $g(1)=2>0$

et $g(2)=9-24\ln 2<0$

alors $1<\alpha<2$

g est $\searrow$ sur $[1;+\infty[$

pour $1<x<\alpha$ on a

$g(x)>g(\alpha)=0$

pour $x>\alpha$ on a

$g(x)<g(\alpha)=0$

D'où

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2°/ $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^3}$; $x>0$

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\times\left(\frac{x}{1+x^3}\right)$

$= 0\times 0 = 0$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^3} = \lim_{+\infty} \frac{x}{x^3}$

$= \lim_{+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$

et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^3) - 3x^2\ln x}{(1+x^3)^2}$

$= \dfrac{1+x^3-3x^3\ln x}{x(1+x^3)^2} = \dfrac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$

T.V de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3°/ $\forall x > 1$; $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

a) f est continue sur $[1;+\infty[$ donc elle admet une primitive H dérivable sur $[1;+\infty[$

$F(x) = H(x) - H(1)$

Donc F est dérivable et $F'(x) = H'(x) - 0$
$= f(x)$

pour tout $x > 1$, $f(x) > 0$ donc F est croissante

T. V de F

x	1	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
$F(x)$	0 $\nearrow$	

b) pour $t \geq 1$ on a

$1 < t^3 \leq 1+t^3 \leq (1+t)^3$

car $(1+t)^3 = 1+3t+3t^2+t^3 \geq t^3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(1+t)^3} \leq \dfrac{1}{1+t^3} \leq \dfrac{1}{t^3}$

$t > 1 \Rightarrow \ln t > 0$

donc $\dfrac{\ln t}{(1+t)^3} \leq \dfrac{\ln t}{1+t^3} \leq \dfrac{\ln t}{t^3}$

$\Rightarrow \dfrac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \dfrac{\ln t}{t^3}$

c) $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt$

$u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \dfrac{1}{t}$

$v'(t) = \dfrac{1}{t^3} \Rightarrow v(t) = \dfrac{-1}{2t^2}$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt = \left[-\frac{\ln t}{2t^2}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t}\times\frac{1}{2t^2}\,dt$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{dt}{t^3}$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^x$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2} + 1\right)$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}$$

d) $\dfrac{1}{t(1+t)^2} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{1+t} + \dfrac{c}{(1+t)^2}$

$$= \frac{a(1+t)^2}{t(1+t)^2} + \frac{bt(t+1)}{t(1+t)^2} + \frac{ct}{t(1+t)^2}$$

$$= \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{t(t+1)^2}$$

par identification des coefficients des deux numérateurs on a :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

4°/ a) on a : $\dfrac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \dfrac{\ln t}{t^3}$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt \leq \int_1^x f(t)\,dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt$$

On pose $J=\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt$

Calculons J

$u(t)=\ln t \Rightarrow u'(t)=\frac{1}{t}$

$v'(t)=\frac{1}{(1+t)^3} \Rightarrow v(t)=\frac{-1}{2(1+t)^2}$

$\Rightarrow J=\left[\frac{-\ln t}{2(1+t)^2}\right]_1^x+\frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t}\times\frac{1}{(1+t)^2}\,dt$

$=\frac{-\ln x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\,dt$

$=\frac{-\ln x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\left[\ln t-\ln(t+1)+\frac{1}{t+1}\right]_1^x$

$=\frac{-\ln x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)+\frac{1}{t+1}\right)_1^x$

$=-\frac{\ln x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$=-\frac{\ln x}{2(1+x)^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}$

$=-\frac{\ln x}{2(1+x)^2}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1-2\ln 2}{4}$

Donc :

en remplaçant les intégrales $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\,dt$ et $J=\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3}\,dt$ par leurs valeurs on a :

$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1-2\ln 2}{4}\le F(x)\le \frac{1}{4}-\frac{1}{4x^2}-\frac{\ln x}{2x^2}$

$\lim_{+\infty} -\frac{\ln x}{2(1+x)^2}=\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{2(1+x)^2}$

$=0\times 0$ car $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2(1+x)^2}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$

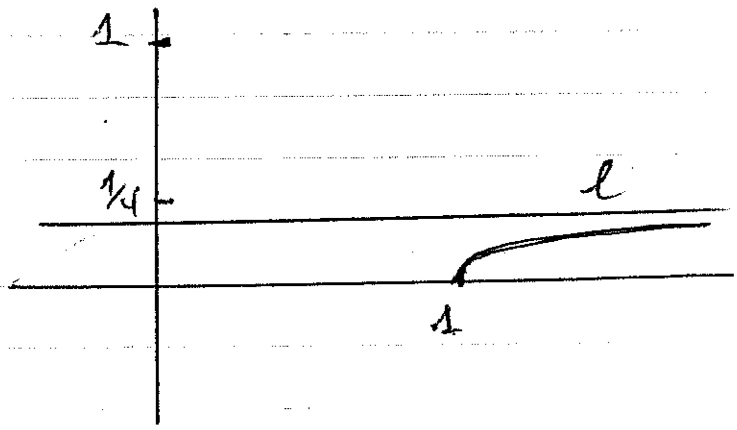
$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$=\ln 1=0$

donc

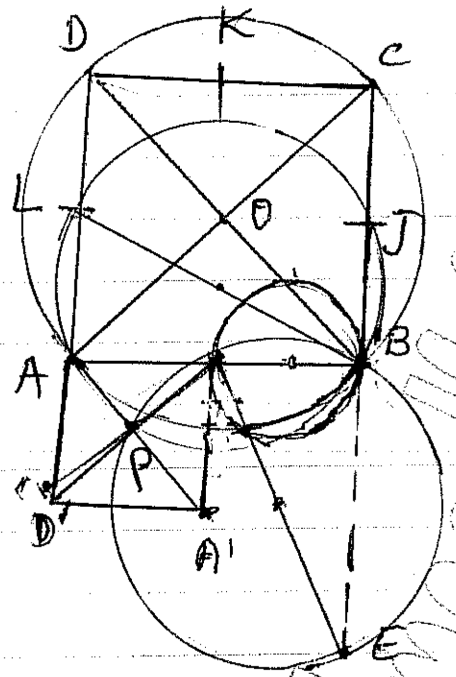
$0-0+0-\frac{1-2\ln 2}{4}\le \ell\le \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\le \ell\le\frac{1}{4}$



Exercice 5

1°/ a)



b) On $CK = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} KI$
$= OI$

et $\vec{CK} \neq \vec{OI}$

donc il existe une unique rotation r telle que $r(C) = O$ et $r(K) = I$

c) Soit α l'angle de r et w son centre

$r(C) = O$ $\Rightarrow$ $\alpha = (\widehat{\vec{CK}, \vec{OI}})$
$r(K) = I$ $\quad = (\widehat{\vec{CK}, \vec{CJ}}) = \frac{\pi}{2}$

et $w = \text{med}[OC] \cap \text{med}[KI]$
$= J$

D'où $r = R_{(J, \frac{\pi}{2})}$

2°/ Soit $f = S_{IJ} \circ S_{JO} \circ S_{OK}$

a) $S_{IJ} \circ S_{JO} = R_{(J, 2(\widehat{\vec{JO}, \vec{JI}}))}$
$= R_{(J, \frac{\pi}{2})} = r$

Donc $f = r \circ S_{OK}$

$f(D) = r \circ S_{OK}(D) = r(C) = O$

$f(K) = r \circ S_{OK}(K) = r(K) = I$

$f(O) = r \circ S_{OK}(O) = r(O) = B$

b) f est la composée d'un deplacement f et d'un antideplacement S_{OK} donc f est un antideplacement

* on a $f \circ f(D) = f(O) = B$
comme $f \circ f(D) \neq D$
alors f est une symetrie glissante

$f \circ f(D) = B \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{DB} = \vec{DO}$

l'axe d passe par le milieu de $[DO]$ et celui de $[KI] = O$

donc $d = (BD)$

d'où $f = t_{\vec{DO}} \circ S_{(BD)} = S_{(BD)} \circ t_{\vec{DO}}$

forme reduite

3°) a) Comme $B \neq L$ et $I \neq A$ alors il existe une unique similitude directe S_1 telle que $S_1(B) = I$ et $S_1(L) = A$

$\Rightarrow$ le rapport $\lambda_1 = \frac{IA}{BL} = \frac{IA}{\sqrt{BA^2+AL^2}}$

$= \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}} = \frac{a/2}{\frac{\sqrt{5}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$= \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) α = Angle de S_1

$\alpha = (\widehat{\vec{BL}, \vec{IA}}) = (\vec{BL}, \vec{BA})$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{BA}{BL} = \frac{2IA}{BL} = 2\lambda_1$

$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $(\widehat{\vec{EB}, \vec{EI}}) \underset{(AB)}{=} S((\widehat{\vec{CB}, \vec{CI}}))$

$= (\widehat{\vec{CI}, \vec{CB}})$

$(\widehat{\vec{CI}, \vec{CB}}) \xrightarrow{R(0,\frac{\pi}{2})} (\widehat{\vec{BL}, \vec{BA}})$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{EB}, \vec{EI}}) = (\vec{CI}, \vec{CB})$

$= (\vec{BL}, \vec{BA})$

$= (\widehat{\vec{BL}, \vec{IA}}) = \alpha$

$S_1 : \begin{array}{l} P \to P \\ B \to I \end{array} \Rightarrow \alpha = (\vec{PB}, \vec{PI})$

$\Rightarrow (\vec{PB}, \vec{PI}) = (\vec{EB}, \vec{EI})$

$\Rightarrow$ B, P, I et E sont cocycliques

$S_1 : \begin{array}{l} P \to P \\ L \to A \end{array} \Rightarrow \alpha = (\vec{PL}, \vec{PA})$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{PL}, \vec{PA}}) = (\widehat{\vec{BL}, \vec{IA}})$

$= (\vec{BL}, \vec{BA})$

$\Rightarrow$ P, B, A et L sont cocycliques

D'où

$P = \mathcal{C}(BEI) \cap \mathcal{C}(BAL)$ et $P \neq B$

d) $S_1 : (\widehat{\vec{PB}, \vec{PL}}) \longrightarrow (\widehat{\vec{PI}, \vec{PA}})$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{PI}, \vec{PA}}) = (\vec{PB}, \vec{PL})$

car la similitude directe conserve l'angle

et $(\widehat{\vec{PB}, \vec{PL}}) = (\vec{AB}, \vec{AL})\ [\pi]$

(cocyclicité) $= \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

donc $(\vec{PI}, \vec{PA}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$(\widehat{\vec{PE}, \vec{PA}}) = (\vec{PE}, \vec{PI}) + (\widehat{\vec{PI}, \vec{PA}})$

$= (\widehat{\vec{BE}, \vec{BI}}) + \frac{\pi}{2}$

$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$

$\Rightarrow$ A, P et E sont alignés

4°) a) g est la composée de deux similitudes directes donc g est une similitude directe

$g(B) = S_1 \circ S_2(B) = S_1(B) = I$

$g(C) = S_1 \circ S_2(C) = S_1(L) = A$

b) $\beta+\alpha = (\widehat{\vec{BC},\vec{BL}}) + (\vec{BL},\vec{IA})$

car : $S_2 : \begin{array}{l} C \longrightarrow L \\ B \longrightarrow B \end{array} \Rightarrow \beta = (\vec{BC},\vec{BL})$

$S_1 : \begin{array}{l} B \longrightarrow I \\ L \longrightarrow A \end{array} \Rightarrow \alpha = (\widehat{\vec{BL},\vec{IA}})$

$\Rightarrow \beta+\alpha = (\widehat{\vec{BC},\vec{IA}}) = \frac{\pi}{2}$

$g : \begin{array}{l} \varphi \longrightarrow \varphi \\ B \longrightarrow I \\ C \longrightarrow A \end{array}$

or l'angle de $g = \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$

donc $(\widehat{\vec{\varphi B},\vec{\varphi I}}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$\varphi \in \mathcal{C}([BI]) = \mathcal{C}_1$

$(\widehat{\vec{\varphi C},\vec{\varphi A}}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}([AC]) = \mathcal{C}_2$

Donc $\varphi = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$

c) Soit $g(O) = O'$

on a $g(B) = I$
$g(C) = A$

$(\widehat{\vec{OB},\vec{OC}}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\widehat{\vec{O'I},\vec{O'A}}) = \frac{\pi}{2}$

car la similitude directe conserve l'angle

et comme le point O' tel que $(\widehat{\vec{O'I},\vec{O'A}}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $O'IA$ est isocèle est unique, alors $O' = P$ car $(\widehat{\vec{PI},\vec{PA}}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Donc $g(O) = P$

$C \xrightarrow{g} A$
$B \xrightarrow{g} I$

$O = B*D \Rightarrow g(O) = g(B)*g(D)$
$\Leftrightarrow P = I*g(D)$
$\Leftrightarrow g(D) = S_P(I) = D'$

$O = A*C \Rightarrow g(O) = g(A)*g(C)$
$\Leftrightarrow P = g(A)*A$
$\Leftrightarrow g(A) = S_P(A) = A'$

D'où

$(ABCD) \xrightarrow{g} A'IAD'$

où $A'IAD'$ est un carré de centre P