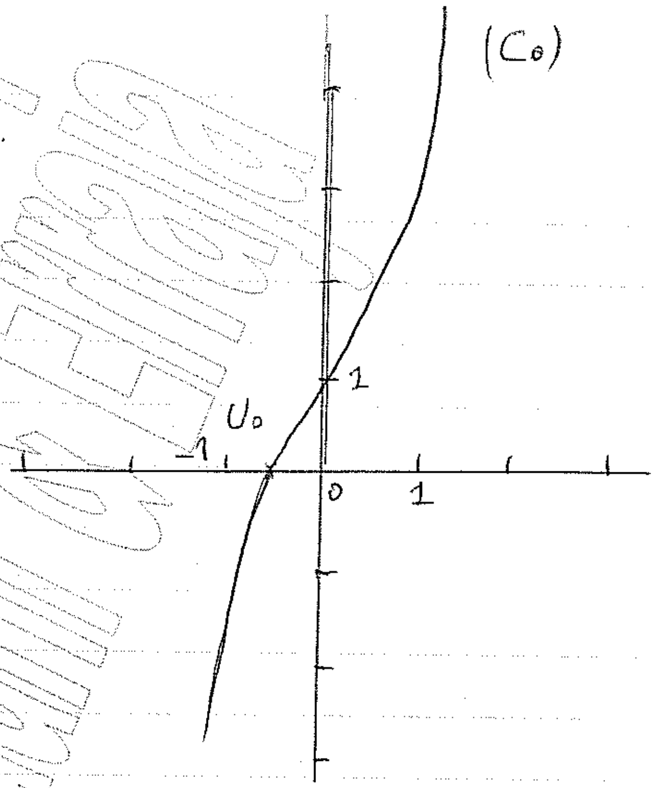
$\boxed{\text{Exercice 1}}$:

1) a) $f_0(x) = x^3 + 4x + 1$

* $f_0'(x) = 3x^2 + 4 > 0$ donc f_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
* $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = \lim\limits_{-\infty} x^3 = -\infty$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
* T.V (Tableau de variation de f)

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_0'(x)$	$+$
$f_0(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$



b) $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ réalise une bijection car elle est continue (polynôme) et croissante sur $\mathbb{R}$

$0 \in \mathbb{R}$ donc $\exists!\, U_0 \in \mathbb{R}$ telque $f_0(U_0) = 0$ mais

$f_0(-1) = -4 < 0 = f_0(U_0) < f_0(0) = 1$

donc $-1 < U_0 < 0$ car f_0 est croissante.

c) * Branches infinies de C_0

comme on a $\lim\limits_{\pm\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{\pm\infty} x^2 = +\infty$

alors C_0 admet une Branche parabolique de direction (oy) en $\pm\infty$

* $(C_0) \cap (ox) = \{(U_0, 0)\}$ car $f_0(U_0) = 0$
* $(C_0) \cap (oy) = \{(0, 1)\}$ car $f_0(0) = 1$

2°) a) * M_1 : on remarque que : $f_n(0) = 1$ (independant de n)

alors $A(0, 1) \in C_n \quad \forall n \geq 0$

* M_2 : si $A(x, y) \in \bigcap\limits_{n \geq 0} C_n$

alors $\forall n \geq 0 \quad A(x, y) \in C_n \cap C_{n+1}$

donc $y = f_n(x) = f_{n+1}(x)$

$\Longrightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$

$\Longrightarrow \cancel{x^3} + 2(n+1+2)x + 1 - \cancel{x^3} - 2(n+2)x - \ldots = 0$

$\Longrightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

donc $y = f_n(0) = 1$

alors $A(0, 1) = \bigcap\limits_{n \geq 0} C_n$

* M_3 : soit $A(x, y) = \bigcap\limits_{n \geq 0} C_n$

donc $\forall n \geq 0 \quad A(x, y) \in C_n$

$\Longrightarrow \forall n \geq 0 \quad y = f_n(x) = x^3 + 2(n+2)x + 1$

donc $\forall n \geq 0 \quad 2nx + 4x + 1 + x^3 - y = 0$

$= 0 \cdot n + 0$

par identification

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4x + 1 + x^3 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

donc $A(0,1) = \bigcap_{n \geq 0} C_n$

b) position relative entre C_n et C_{n+1}

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^3 + 2(n+3)x + 1 - x^3 - 2(n+2)x - 1$

$= 2x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	$-$	0	$+$
P.R	C_n / C_{n+1}	$C_n = C_{n+1}$	C_{n+1} / C_n

3) a) $f_n'(x) = 3x^2 + 2(n+2) > 0$

donc f_n est strictement croissante, et continue (polynôme)

donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$0 \in \mathbb{R}$ alors $\exists!\, U_n \in \mathbb{R}$ telsque

$f_n(U_n) = 0$

mais $f_n(-1) = -2(n+2) < 0 = f_n(U_n)$

donc $-1 < U_n$ car f_n est $\nearrow$

et $0 = f_n(U_n) < f_n(0) = 1$

donc $-1 < U_n < 0$

b) on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$

$\forall x \in]-\infty, 0[$

$U_n \in]-1, 0[$

donc $f_{n+1}(U_n) - \overbrace{f_n(U_n)}^{0} < 0$

alors $f_{n+1}(U_n) < 0 = f_{n+1}(U_{n+1})$

donc $U_n < U_{n+1}$ car f_{n+1} est $\nearrow$

donc (U_n) est $\nearrow$ mais $U_n < 0$

donc (U_n) est $\nearrow$ et majorée

alors (U_n) est convergente

$\boxed{\text{Exercice 2}}$:

$P(z) = z^3 - (4+6i)z^2 + (-5+18i)z + 18 - 12i$

1) a) $P(2) = 8 - 4(4+6i) + 2(-5+18i) + 18 - 12i$

$= 8 - 16 - 24i - 10 + 36i + 18 - 12i$

$= 26 - 26 - 36i + 36i = 0$

$P(3i) = -27i + 9(4+6i) + 3i(-5+18i) + 18 - 12i$

$= -27i + 36 + 54i - 15i - 54 + 18 - 12i$

$= 54 - 54 + 54i - 54i = 0$

b) on a $P(2) = P(3i) = 0$

donc $P(z) = (z-2)(z-3i)(z-z_0)$

selon T.H

	1	$-4-6i$	$-5+18i$	$18-12i$
2	$\times$	2	$-4-12i$	$-18+12i$
	1	$-2-6i$	$-9+6i$	0

donc $P(z) = (z-2)(z^2 - (2+6i)z - 9 + 6i)$

et $(z^2 - (2+6i)z - 9 + 6i) = (z-3i)(z-z_0)$

Selon T.H

	1	$-2-6i$	$-9+6i$
$3i$	$\times$	$3i$	$9-6i$
	1	$-2-3i$	0

donc $P(z) = (z-2)(z-3i)(z-(2+3i))$

donc si $P(z)=0 \Rightarrow z=2$ ou $z=3i$ ou $z=2+3i$

on a $|2|=2<3=|3i|<|2+3i|=\sqrt{13}$

donc $z_1=2$; $z_2=3i$ et $z_3=2+3i$

2) a) $z_G=\dfrac{1\times z_A-3\times z_B+4z_C}{1-3+4}$

$=\dfrac{2-9i+8+12i}{2}=\dfrac{10+3i}{2}=5+\frac{3}{2}i$

b) $\phi_1(M)=(1-3+4)MG^2+\phi_1(G)$

$=2MG^2+\phi_1(G)$

mais $\phi_1(G)=GA^2-3GB^2+4GC^2$

$=|2-5-\frac{3}{2}i|^2-3|3i-5-\frac{3}{2}i|^2+4|2+3i-5-\frac{3}{2}i|^2$

$=|-3-\frac{3}{2}i|^2-3|-5+\frac{3}{2}i|^2+4|-3+\frac{3}{2}i|^2$

$=9+\frac{9}{4}-3(25+\frac{9}{4})+4(9+\frac{9}{4})$

$\Rightarrow \phi_1(G)=-\frac{51}{2}$

$\Rightarrow \phi_1(M)=2MG^2-\frac{51}{2}$

$\phi_2(M)=4MA^2-2MB^2-2MC^2$

soit $I=B*C$

alors $2MB^2+2MC^2$

$=2(\vec{MI}+\vec{IB})^2+2(\vec{MI}+\vec{IC})^2$

$=4MI^2+2IB^2+2IC^2+4\vec{MI}\cdot\underbrace{(\vec{IB}+\vec{IC})}_{\vec{0}}$

$=4MI^2+BC^2$

$BC^2=|2+3i-3i|^2=4$

alors $\phi_2(M)=4\vec{MA}^2-4\vec{MI}^2-4$

$=4(\vec{MA}-\vec{MI})\cdot(\vec{MA}+\vec{MI})-4$

$=4\vec{IA}\cdot(\vec{MA}+\vec{MI})-4$

soit $J=A*I$

donc $\phi_2(M)=4\vec{IA}\cdot 2\vec{MJ}-4$

$=8\vec{IA}\cdot\vec{MJ}-4$

c) $M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow \phi_1(M)=-3 \Leftrightarrow 2MG^2-\frac{51}{2}=-3$

$\Leftrightarrow 2MG^2=\frac{51}{2}-3=\frac{45}{2}$

$\Leftrightarrow MG^2=\frac{45}{4}=GA^2$

$\Leftrightarrow MG=GA$

donc $M\in\mathcal{C}(G,GA)=\Gamma_1$

si $M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow 8\vec{IA}\cdot\vec{MJ}=44+4=48$

$\Leftrightarrow \vec{IA}\cdot\vec{MJ}=6$

soit H le projeté orthogonale de M sur (IA)

$\Leftrightarrow \vec{IA}\cdot(\underbrace{\vec{MH}}_{0}+\vec{HJ})=6$

$\overline{IA}\times\overline{HJ}=6$

$\overline{HJ}=\dfrac{6}{\overline{IA}}$

et Γ_2 est la $\perp$ à (IA) en H

Exercice 3:

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\ln(x)}{\ln(x)\left[x^2\times\frac{1}{\ln(x)} - 1\right]}$

$= \dfrac{2}{0\times\frac{1}{-\infty} - 1} = \dfrac{2}{0-1} = -2 = f(0)$

donc f est continue en 0^+

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{2\ln(x)}{x^2-\ln(x)}+2}{x}$

$= \lim\limits_{0^+} \dfrac{2x^2}{x^3-x\ln(x)} = \lim\limits_{0^+} \dfrac{2x^2}{x^2-\ln(x)}$

$= 2\times 0^2 \times \dfrac{1}{0+\infty} = 0\times 0 = 0 = f'_d(0)$

donc f est derivable a droite zéro

interprétation graphique:

C_f admet au point $(0,-2)$ une demi-tangente horizontale.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2\ln(x)}{x^2}\times\dfrac{1}{1-\frac{\ln(x)}{x^2}}$

$= 2\times 0\times \dfrac{1}{1-0} = 0$

interprétation graphique:

la droite d'équation $y=0$ est un asymptote horizontale de C_f en $+\infty$.

2) a) $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}(x^2-\ln(x)) - (2x-\frac{1}{x})\cdot 2\ln(x)}{(x^2-\ln(x))^2}$

$= \dfrac{2x - \cancel{\frac{2\ln(x)}{x}} - 4x\ln(x) + \cancel{\frac{2\ln(x)}{x}}}{(x^2-\ln(x))^2}$

$= \dfrac{2x(1-2\ln(x))}{(x^2-\ln(x))^2}$

donc si $f'(x)\le 0 \iff \frac{1}{2}\le \ln(x) \iff \sqrt{e}\le x$

et si $f'(x)\ge 0 \iff \sqrt{e}\ge x$

T.V

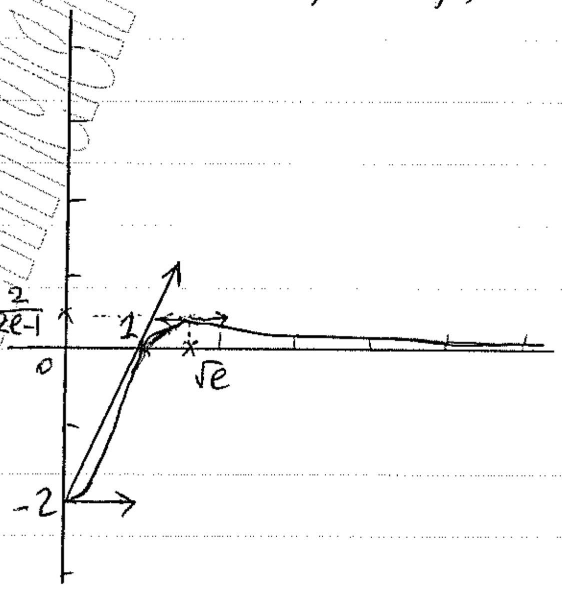
x	0	$\sqrt{e}\simeq 1{,}6$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-2 \nearrow$	$\frac{2}{2e-1}\simeq 0{,}5$	$\searrow 0$

b) Equation de la tangente de C_f en $x_0=1$

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$y = 2(x-1)+0 \Rightarrow y = 2(x-1)$

c) Courbe de f (C_f)



3) a) La fonction $t\longmapsto tf(t)$ est continue sur $[1,+\infty[$ car elle est le produit des fonctions continues donc elle admet une primitive H alors $F(x) = H(x)-H(1)$ donc F est derivable (somme des fonctions derivables) et $F'(x) = H'(x) = xf(x) = \dfrac{2x\ln(x)}{x^2-\ln(x)}$

mais pour $x \geq 1$ on a $f(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$

alors $F'(x) = xf(x) \geq 0$

donc F est croissante

b) pour $t \geq 1$:

$$g(t) - \frac{2\ln(t)}{t} = \frac{2t\ln(t)}{t^2-\ln(t)} - \frac{2\ln(t)}{t}$$

$$= \frac{\cancel{2t^2\ln(t)} - \cancel{2t^2\ln(t)} + 2\ln^2(t)}{t(t^2-\ln(t))}$$

$$= \frac{\ln(t)}{t} \times \frac{2\ln(t)}{t^2-\ln(t)} = \frac{\ln(t)}{t} \times f(t) \geq 0$$

car $\frac{\ln(t)}{t} \geq 0 \ \forall\, t \geq 1$ et $f(t) \geq 0$

donc $g(t) \geq \frac{2\ln(t)}{t}$

alors $t\,g(t) \geq 2\ln(t)$

$$\Rightarrow F(x) = \int_1^x t\,g(t)\,dt \geq 2\int_1^x \ln(t)\,dt$$

d'autre part

$$(t\ln(t) - t)' = \ln(t) + t \times \frac{1}{t} - 1 = \ln(t)$$

donc $F(x) \geq 2\left[t\ln(t) - t\right]_1^x$

$\Rightarrow F(x) \geq 2x\ln(x) - 2x + 2$

et $\lim\limits_{+\infty} 2x\ln(x) - 2x + 2$

$= \lim\limits_{+\infty} x(2\ln(x) - 2) + 2$

$= +\infty(+\infty - 2) + 2 = +\infty$

et selon les Théorèmes de comparaisons

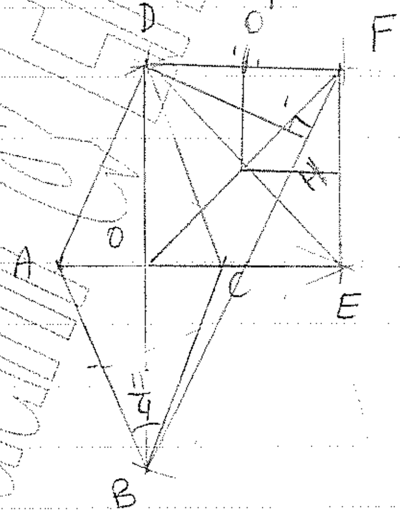
$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

c) TV de F

x	1	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
$F(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Exercice 4 :

1) La figure.



2)a) on a $AD = BA$ et $\vec{AD} \neq \vec{BA}$

donc il existe une unique rotation r: $A \xmapsto{\text{transforme}} B$

$D \longmapsto A$

b) l'angle de r est $\alpha = (\vec{AD}, \vec{BA})$

$\overset{\text{Coli}}{=} (\vec{AD}; \vec{AB}) + \pi$

$= 2(\vec{AC}, \vec{AB}) + \pi$ car $(AC) = \text{biss } \widehat{BAD}$

$= -\pi - (\vec{BA}, \vec{BC}) + \pi$

$= (\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{4}$

puisque BAC est isocèle en B

donc $2(\vec{AC}, \vec{AB}) + (\vec{BA}, \vec{BC}) = -\pi$

(les deux angles de la bases sont égaux)

Le centre de r est l'intersection

med[AB] ∩ med[DA] = E

car on a : $(\vec{AE}, \vec{AD}) = (\vec{AC}, \vec{AB})$

$(\vec{AE}, \vec{AD}) = \frac{\pi - (\vec{DA}, \vec{DC})}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$

puisque ADC est isocèle en D et $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{4}$

d'autre part : $(\vec{DA}, \vec{DE})$

$= (\vec{DA}, \vec{DO}) + (\vec{DO}, \vec{DE})$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

alors $(\vec{AE}; \vec{AD}) = (\vec{DA}, \vec{DE}) = \frac{3\pi}{8}$

donc AED est isocèle en E

$\Rightarrow EA = ED \Rightarrow E \in med[AD]$

$S_{(AC)} : A \mapsto A$, $E \mapsto E$, $D \mapsto B$ $\Rightarrow EB = ED = EA$

$\Rightarrow E \in med[AB]$

3) a) puisque $B \neq D$ et $D \neq F$ donc il existe une unique similitude $S : B \xrightarrow{\text{transforme}} D$, $D \mapsto F$

b) Son rapport $k = \frac{DF}{DB} = \frac{DO}{2DO} = \frac{1}{2}$

l'angle de S est $\alpha = (\vec{DB}, \vec{FD})$

$= (\vec{DB}, \vec{DF}) + \pi$

$= \frac{\pi}{2} + \pi = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

c) S(BH) = le ⊥ à (BH) menés de S(B) = D

$\Rightarrow S(BH) = (DH)$

et S(DH) = le ⊥ à (DH) mené de S(D) = F

$\Rightarrow S(DH) = (BF)$

$H = (BH) \cap (DH)$ et S conserve le concours donc.

$S(H) = S(BH) \cap S(DH)$

$\Rightarrow (DH) \cap (BF) = H$

donc H est le centre de S.

d) $O = B * D \Rightarrow S(O) = S(B) * S(D)$

$\Rightarrow S(O) = D * F = O'$

(conservation du milieu)

DOEF est un carré direct alors S(DOEF) = FO'S(E)S(F) est un carré de sens direct

puisque $O' = D * F$ alors ;

$S(E) = O * F$ et $S(F) = F * E$

4) a) $\vec{OE} = 1 \times \vec{OE} + 0.\vec{OD} \Rightarrow E(1,0)$

$\vec{OD} = 0.\vec{OE} + 1 \times \vec{OD} \Rightarrow D(0,1)$

$\vec{OB} = 0.\vec{OE} - 1 \times \vec{OD} \Rightarrow B(0,-1)$

$\vec{OF} = \vec{OE} + \vec{EF} = 1 \times \vec{OE} + 1 \times \vec{OD}$

$\Rightarrow F(1,1)$

b) L'expression complexe de toute similitude direct est de la forme : $z' = az + b$ ou $|a| \neq 1$

on a : $S(B) = D \Rightarrow z_D = a z_B + b$

$\Rightarrow i = -ia + b$ .... (1)

et $S(D) = F \Rightarrow z_F = a z_D + b$

$\Rightarrow 1 + i = ia + b$ ...... (2)

donc $\begin{cases} i = -ia + b \\ 1+i = ia+b \end{cases} \xRightarrow{\text{add}} 1+2i = 2b$

donc $b = \frac{1}{2} + i$

et $i^2 = -1 = a + ib$

donc $a = -1 - ib = -1 - \frac{i}{2} + 1 = \frac{-i}{2}$

donc $z' = \frac{-i}{2} z + \frac{1}{2} + i$

c) le rapport de S est $k = \left|\frac{-i}{2}\right| = \frac{1}{2}$

et l'angle de S est $\alpha = \arg\left(\frac{-i}{2}\right) = \frac{-\pi}{2}$

comme on a $S(H) = H$

alors $z_H = \frac{-i}{2} z_H + \frac{1}{2} + i$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{i}{2}\right) z_H = \frac{1+2i}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{2+i}{2}\right) z_H = \frac{1+2i}{2}$

donc $z_H = \dfrac{\frac{1+2i}{2}}{\frac{2+i}{2}} = \frac{1+2i}{2+i} \times \frac{(2-i)}{2-i}$

$z_H = \frac{2-i+4i+2}{2^2+1^2} = \frac{4}{5} + \frac{3i}{5}$

$\Longrightarrow H\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Exercice 5 :

1) a) $-1 + \frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{-e^x - 1 + 2e^x}{e^x+1} = \frac{e^x - 1}{e^x+1}$

$= f(x)$

et $1 - \frac{2}{e^x+1} = \frac{e^x+1-2}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = f(x)$

b) * $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} -1 + \frac{2e^x}{e^x+1} = -1 + \frac{2\times 0}{0+1}$

$= -1$

* interpretation graphique ;

la droite d'equation $y = -1$ est un asymptôte horizontale de C_f en $-\infty$

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} 1 - \frac{2}{1+e^x} = 1 - \frac{2}{+\infty} = 1$

interpretation graphique ;

la droite d'equation $y = 1$ est un asymptôte horizontale de C_f en $+\infty$.

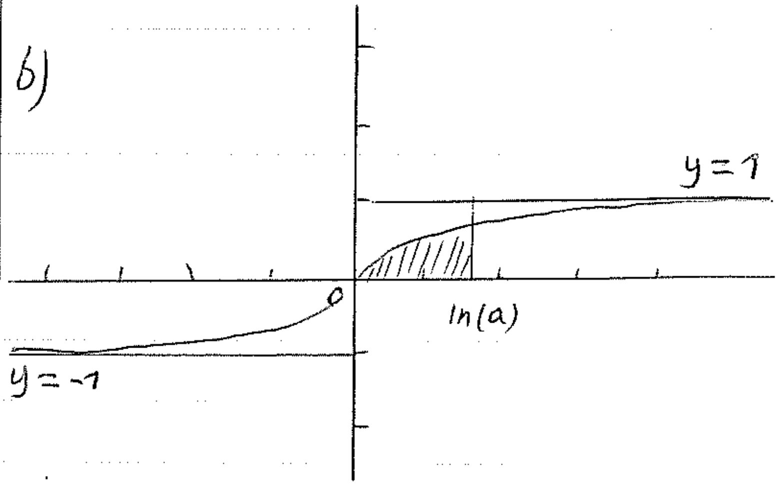
2) a) $f(x) = 1 - \frac{2}{1+e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$

donc f est croissante

T.V

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$	-1	0	$\nearrow 1$

b)



c) L'aire demandé est $A=\int_0^{\ln(a)} f(x)\,dx$

$$=\int_0^{\ln(a)}\left(-1+\frac{2e^x}{1+e^x}\right)dx = \left[-x+2\ln(1+e^x)\right]_0^{\ln(a)}$$

$$= -\ln(a)+2\ln(1+a)-2\ln(2)$$

$$=-2\ln\sqrt{a}+2\ln(1+a)-2\ln(2)$$

$$=2\left(\ln\left(\frac{1+a}{2\sqrt{a}}\right)\right)$$

3) a) $I_1=\int_0^{\ln(a)} f(t)\,dt = 2\ln\left(\frac{1+a}{2\sqrt{a}}\right)$

b) $1-2f'(x) = 1-\frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

$$=\frac{1+e^{2x}+2e^x-4e^x}{(1+e^x)^2} = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

$$=f^2(x)$$

$$I_2=\int_0^{\ln(a)} f^2(t)\,dt = \int_0^{\ln(a)}(1-2f'(t))\,dt$$

$$=\left[x-2f(t)\right]_0^{\ln(a)}$$

$$=\ln(a)-2f(\ln(a))+\underbrace{2f(0)}_{0}$$

$$\Rightarrow I_2=\ln(a)-2\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$$

c) pour $0\le t\le \ln(a)\Rightarrow f(0)\le f(t)\le f(\ln(a))$

$$\Rightarrow 0\le f(t)\le\frac{a-1}{a+1}$$

$$\Rightarrow 0\le f^n(t)\le \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n$$

en Appliquant I.M sur $[0,\ln(a)]$ pour f

$$\Rightarrow 0\le\int_0^{\ln(a)} f^n(t)\,dt \le \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n.\ln(a)$$

on a $\lim\limits_{+\infty}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n = \lim\limits_{+\infty}\frac{a^n\left(1-\frac{1}{a}\right)^n}{a^n\left(1+\frac{1}{a}\right)^n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^n}$$

$$=0\times\frac{1}{+\infty}=0\times 0=0$$

car $0<1-\frac{1}{a}<1$ et $1+\frac{1}{a}>1$

donc selon Théoreme de gendarme

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=0$$

d) selon la linéarité de l'intégrale

$$I_n-I_{n+2}=\int_0^{\ln(a)}\left(f^n(t)-f^{n+2}(t)\right)dt$$

$$=\int_0^{\ln(a)} f^n(t)\left(1-f^2(t)\right)dt$$

$$=\int_0^{\ln(a)} 2f'(t).f^n(t)\,dt$$

$$=2\left[\frac{f^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\ln(a)}$$

$$=\frac{2}{n+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$$ car $f(\ln(a))=\frac{a-1}{a+1}$ et $f(0)=0$

4) a) on a $I_n-I_{n+2}=\frac{2}{n+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{n+1}$

pour $k=n+1$

donc $\frac{1}{2}\left(I_{k-1}-I_{k+1}\right)=\frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$

donc $S_n(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}-I_{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_{k-1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_{k+1}$$

alors $S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + \cdots + I_{n-1})$
$- \frac{1}{2}(I_2 + I_3 + \cdots + I_{n-1}) - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_{n+1}$

$= \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}(I_2 + I_3 \cdots + I_{n-1})$
$- \frac{1}{2}(I_2 + I_3 + \cdots + I_{n-1}) - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_{n+1}$

$\Rightarrow S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}I_{n+1}$

par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ on trouve :

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(a) = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}\times 0 - \frac{1}{2}\times 0$

$= \frac{1}{2}\ln(a) + \ln\left(\frac{a+1}{2\sqrt{a}}\right)$

$= \ln\left(\sqrt{a} \times \frac{(a+1)}{2\sqrt{a}}\right) = \ln\left(\frac{a+1}{2}\right)$

6) $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{9}{11}\right)^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{10-1}{10+1}\right)^k$

$= S_n(10)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(10)$

$= \ln\left(\frac{10+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{11}{2}\right)$