Exercice 1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x \ln(e^x+1)$

1) $\bullet\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = 0 \end{cases}$

$\bullet\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) = +\infty \end{cases}$

$\bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} \cdot \ln(e^x+1)$

$= +\infty \times +\infty = +\infty$

Interprétation graphiques :

$\bullet\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ (ox) asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage $(-\infty)$

$\bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$: la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $(+\infty)$

2) a)

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x \ln(e^x+1) + \dfrac{e^x}{e^x+1} \cdot e^x$

donc $\boxed{f'(x) = e^x \ln(e^x+1) + \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}}$

on sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ d'où $e^x + 1 > 1$ alors $\ln(e^x+1) > 0$

donc $f'(x) > 0$

T.V de f :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

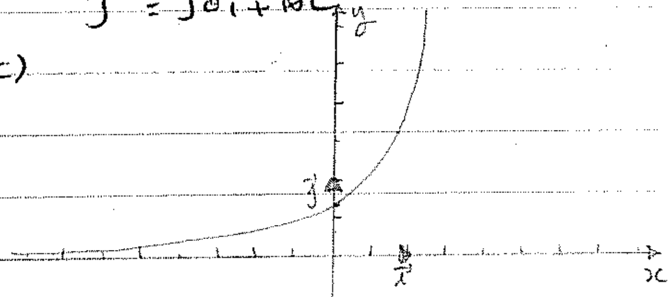
b) $\bullet$ f est continue sur $\mathbb{R}$

$\bullet$ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\bullet$ $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$

alors f réalise bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, et par suite $J =]0,+\infty[$

c)



$\bullet$ la courbe $\mathcal{C}$ coupe (oy) au point $A(0, \ln 2)$

$\bullet\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Rightarrow \mathcal{C} \cap (ox) = \phi$

2)

$I = \int_0^1 f(x)\,dx$

Methode 1 : on utilise une identification pour determiner les réels a, b et c :

$$f'(x) = f(x) + ae^{x} + b + \frac{c\,e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= f(x) + ae^{x} + b + \frac{c}{1+e^{x}}$$

$$= f(x) + \frac{a e^{2x} + (a+b)e^{x} + b + c}{1+e^{x}}$$

d'autre part

$$f'(x) = f(x) + \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}$$

identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \\ b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

D'où $\boxed{f'(x) = f(x) + e^{x} - 1 + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(f'(x) - e^{x} + 1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx$$

$$= \left[f(x) - e^{x} + x + \ln(1+e^{-x})\right]_0^1$$

$$= f(1) - e + 1 + \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) - f(0) + e^{0} + 0 - \ln 2$$

donc

$$I = e\ln(e+1) - e + 1 + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right) - \ln 2 + 1 - \ln 2$$

Enfin

$$\boxed{I = (e+1)\ln(e+1) - e + 1 - 2\ln 2}$$

Méthode b : En posant $t = e^{x} + 1$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = 1 \Rightarrow t = e+1 \\ dt = e^{x}\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{t-1} \end{cases}$$

donc

$$I = \int_2^{e+1} (t-1)\ln t \times \frac{dt}{t-1}$$

$$= \int_2^{e+1} \ln t\,dt$$

On utilise une intégration par parties :

On pose $\begin{cases} u = \ln t \\ v' = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u' = \frac{1}{t} \\ v = t \end{cases}$

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$ alors

$$I = \left[t\ln t\right]_2^{e+1} - \int_2^{e+1} dt$$

d'où $I = (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2 - \left[t\right]_2^{e+1}$

donc $I = (e+1)\ln(e+1) - e - 1 + 2$

Enfin $I = (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2 - e + 1$

$$\boxed{I = (e+1)\ln(e+1) - e + 1 - 2\ln 2}$$

Exercice 2 : $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ R.O.N

$A(2;1;3)$; $B(3;2;1)$; $C(4;1;4)$

$D(5;3;-2)$ et $E(6;-2;-4)$

1) a)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 1-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DE} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ -2-3 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

pour montrer que $\vec{DE}$ est normal au plan (ABC) il suffit de montrer que $\vec{DE}\cdot\vec{AB}=0$ et $\vec{DE}\cdot\vec{AC}=0$ car $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$\vec{DE}\cdot\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1-5+4=0$$

$$\vec{DE}\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2-2=0$$

conclusion : $\vec{DE}$ est normal au plan (ABC)

b) $\vec{DE}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal au (ABC)

$A(2,1,3)\in(ABC)$ donc l'équation cartesienne du plan (ABC) est $1(x-2)-5(y-1)-2(z-3)=0$

$(ABC) : x-5y-2z+9=0$

c) • $\vec{DE}$ est un vecteur directeur de (DE) et $D\in(DE)$ donc

$$M(x,y,z)\in(DE) \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+t \\ y=3-5t \\ z=-2-2t \end{cases}$$

d) $F(a,b,c)$ le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) donc $F\in(DE)$ et $F\in P$ et par suite $a=5+t_0$; $b=3-5t_0$; $c=-2-2t_0$ et $a-5b-2c+9=0$

donc

$(5+t_0)-5(3-5t_0)-2(-2-2t_0)+9=0$

$\Leftrightarrow 30t_0+3=0 \Leftrightarrow t_0=\frac{-1}{10}$

et par suite

$a=5-\frac{1}{10}=\frac{49}{10}$; $b=3+\frac{5}{10}=\frac{7}{2}$

$c=-2+\frac{2}{10}=\frac{-9}{5}$

$\boxed{F\left(\frac{49}{10};\frac{7}{2};\frac{-9}{5}\right)}$

$\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}\frac{49}{10}-6\\ \frac{7}{2}+2\\ \frac{-9}{5}+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-11}{10}\\ \frac{11}{2}\\ \frac{11}{5}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DF}=\begin{pmatrix}\frac{49}{10}-5\\ \frac{7}{2}-3\\ \frac{-9}{5}+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{10}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

alors

$\overrightarrow{EF}=11\overrightarrow{DF}$ donc $\boxed{K=11}$

2) a)

$V_{(ABCD)}=\frac{1}{3}S_{(ABC)}\times DF$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=2-2=0$

donc ABC est un triangle rectangle en A et par suite

$S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}$

. $AB=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

. $AC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

. $DF=\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{1}{4}+\frac{1}{25}}=\frac{\sqrt{6}\sqrt{5}}{10}$

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}{10}$

$\boxed{V_{(ABCD)}=\frac{1}{2}}$

b) on sait que $11\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{EF}=\vec{0}$

donc

$F=\text{bar}\left[\begin{array}{c|c}D&E\\ 11&-1\end{array}\right]$

$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2-ME^2=-30$

$\Leftrightarrow 10MF^2+11FD^2-FE^2=-30$

or $FD^2=\frac{30}{100}$; $FE^2=121\times\frac{30}{100}$

donc $10MF^2=-30-11\times\frac{30}{100}+121\times\frac{30}{100}$

$=3$

$\Rightarrow MF=\sqrt{\frac{3}{10}}$ et par suite $\Gamma_1=S_p(F;FD)$

Γ_1 : est une sphère de centre F et de rayon FD.

- $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -30$

$\Leftrightarrow (\vec{MD} - \vec{ME})(\vec{MD} + \vec{ME}) = -30$

$\Leftrightarrow \vec{ED} \cdot 2\vec{MI} = -30$ où ($I = E*D$)

$\Leftrightarrow \vec{IM} \cdot \vec{ED} = 15$

ⓑ Soit J le point de l'espace tel que $\vec{IJ} = \frac{15}{ED}\vec{ED}$

$= 5\sqrt{30}\,\vec{ED}$

donc Γ_2 : le plan parallèle à (ABC) et contient J.

ⓒ Comme $AD^2 - AE^2 = -36 \Rightarrow A \in \Gamma_2 \Rightarrow \Gamma_2 = (ABC)$

Exercice 3 : $\forall \theta \in [0, 2\pi[$

$E_\theta : z^2 - 6\cos\theta\, z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$

1) a) Résolvons l'équation E_θ :

$\Delta' = 9\cos^2\theta - 4 - 5\cos^2\theta$

$= 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta$

$= (2i\sin\theta)^2$ donc

$\delta = 2i\sin\theta$

les solutions sont

$z_1 = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$

$z_2 = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

$\forall \theta \in [0, \pi[$ $\sin\theta \geq 0$ donc $\forall \theta \in [0, \pi[$ $Im(z_1) \geq 0$

b)

- E_θ admet des solutions doubles

$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$; $\theta \in [0, 2\pi[$

$\Leftrightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

dans ce cas $z_{A_1} = 3$ et $z_{A_2} = -3$

- E_θ admet des solutions imaginaires pures $\Leftrightarrow \cos\theta = 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$

dans ce cas $z_{B_1} = 2i$; $z_{B_2} = -2i$

2)

$z_{M_1} = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$; $z_{M_2} = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$

$$\begin{cases} x_{M_1} = 3\cos\theta \\ y_{M_1} = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x_{M_1}}{3}\right)^2 = \cos^2\theta \\ \left(\frac{y_{M_1}}{2}\right)^2 = \sin^2\theta \end{cases}$$

donc

$$\frac{x_{M_1}^2}{3^2}+\frac{y_{M_1}^2}{2^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

de même $\frac{x_{M_2}^2}{3^2}+\frac{y_{M_2}^2}{2^2}=1$

donc M_1 et M_2 appartiennent le même élipse d'équation

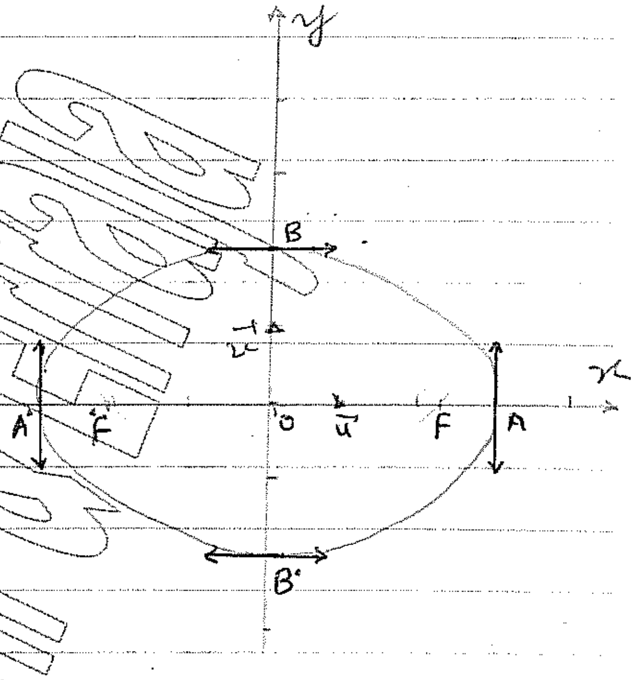
$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

donc Γ est une ellipse de centre O et d'equation cartesienne

$$\boxed{\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1}$$

b) Γ est une ellipse de centre O et des sommets $A(3,0)$; $A'(-3,0)$; $B(0,2)$, $B'(0,-2)$ et de foyers $F(\sqrt{5},0)$, $F'(-\sqrt{5},0)$ d'axe focal $(O,\vec{i})$ de directrices $D: x=\frac{9}{\sqrt{5}}$; $D': x=\frac{-9}{\sqrt{5}}$

et d'excentricité : $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$



3) $f(M)=M' \Leftrightarrow M'=\text{bar}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & M \\ -4 & 2 & 3\end{bmatrix}$

$$z'=\frac{-4z_{A_1}+2z_{B_1}+3z}{-4+2+3}$$

$$=\frac{-4\times 3+2\times 2i+3z}{1}$$

donc $z'=3z-12+4i$

$a=3\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $z'=az+b$

donc f est une homothetie de rapport $k=3$ et de centre Ω d'affixe

$$z_\Omega=\frac{-12+4i}{1-3}=6-2i$$

b) $\Gamma'=f(\Gamma)$

$M(x';y') \in \Gamma'$, $M(x;y) \in \Gamma$

Telque $f(M) = M'$

$\Leftrightarrow x'+iy' = 3(x+iy)-12+4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x-12 \\ y' = 3y+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'+12}{3} \\ y = \dfrac{y'-4}{3} \end{cases}$

d'aprés 2-a

$\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x'+12)^2}{9^2} + \dfrac{(y'-4)^2}{6^2} = 1$

donc l'equation cartésienne de Γ' est

$$\boxed{\dfrac{(x'+12)}{9^2} + \dfrac{(y'-4)}{6^2} = 1}$$

Exercice 4 : $\forall n \geq 2$; $U_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

$\forall x \in]0,+\infty[$; $f(x) = x - \ln x$

1) Tableau de variation de f :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - \ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

f est derivable sur $]0,+\infty[$

et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{x-1}{x}$

on constate que le signe de f' est celui de $x-1$ sur $]0,+\infty[$.

dressons le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$

a) utilisons une intégration par partie pour calculer $\int_\lambda^1 \ln x\,dx$

on pose $\begin{cases} u = \ln x \\ V' = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ V = x \end{cases}$

donc : $\int_\lambda^1 \ln x\,dx = \left[x\ln x\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 dx$

$= -\lambda\ln\lambda - \left[x\right]_\lambda^1$

d'où $\boxed{\int_\lambda^1 \ln x\,dx = \lambda - 1 - \lambda\ln\lambda}$

b)

$I(\lambda) = \int_\lambda^1 (x - \ln x)\,dx$

$= \int_\lambda^1 x\,dx - \int_\lambda^1 \ln x\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_\lambda^1 - (\lambda - 1 - \lambda\ln\lambda)$

donc $I(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{3}{2} + \lambda\ln\lambda$

Enfin $\boxed{I(\lambda) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \lambda\ln\lambda}$

Comme $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \lambda\ln\lambda = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} -\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda = 0$

alors $\boxed{\lim\limits_{\lambda \to 0^+} I(\lambda) = \frac{3}{2}}$

3) $n \geq 2$, $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) Montrons que $\forall\, 1 \leq k \leq n-1$

$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

on a $1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} < 1$

donc $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{k+1}{n} \leq 1$

d'où $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset \left]0, 1\right]$ et

f strictement décroissante sur $]0,1]$

donc pour $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$ on a

$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$

par intégration

$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dt$

$\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \times \frac{1}{n} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n}$

Enfin :
$$\boxed{\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

b) on écrit l'inégalité precédente

pour des valeurs de k, de $k=1$

à $k = n-1$

$$\begin{cases} \frac{1}{n}f(\frac{2}{n}) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \\ \frac{1}{n}f(\frac{3}{n}) \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f(\frac{2}{n}) \\ \frac{1}{n}f(\frac{4}{n}) \leq \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f(\frac{3}{n}) \\ \vdots \\ \frac{1}{n}f(\frac{n}{n}) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f(\frac{n-1}{n}) \end{cases}$$

pour addition membre à membre:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

on peut écrire:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt \leq S_n - \frac{1}{n}f(1)$$

$$\Rightarrow S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \leq I(\frac{1}{n}) \leq S_n - \frac{1}{n} \leq S_n$$

d'où

$$\boxed{S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \leq I(\frac{1}{n}) \leq S_n}$$

on a : $S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \leq I(\frac{1}{n})$

$$\Rightarrow \boxed{S_n \leq I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})} \quad (1)$$

d'autre part $\boxed{I(\frac{1}{n}) \leq S_n}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$

$$\boxed{I(\frac{1}{n}) \leq S_n \leq I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})}$$

c)

• $\lim\limits_{n\to+\infty} I(\frac{1}{n}) = \lim\limits_{\lambda\to 0^+} I(\lambda) = \frac{3}{2}$ (d'après 3-b)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - \ln(\frac{1}{n})\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\ln n}{n}\right) = 0$

donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} I(\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) = \frac{3}{2}$

$\xrightarrow{T.g} \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$

4) a)

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln(n)$$

$$= \ln(\prod_{k=1}^{n} k) - n\ln(n)$$

$$= \ln(n!) - \ln(n^n)$$

donc : $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

• $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3 \cdots + n$

est une somme d'une suite arithmétique de raison $r=1$ et 1^{er} terme $U_1 = 1$ et par suite :

$$\sum_{k=1}^{n} k = (n-1+1)\,\frac{(U_1+U_n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b)

on a $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n} - \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

$$= \frac{n^2+n}{2n^2} - \ln\left(\frac{n!^{\frac{1}{n}}}{n}\right)$$

donc $\boxed{S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - \ln(U_n)}$

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$

alors $\lim_{n\to+\infty} \ln(U_n) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

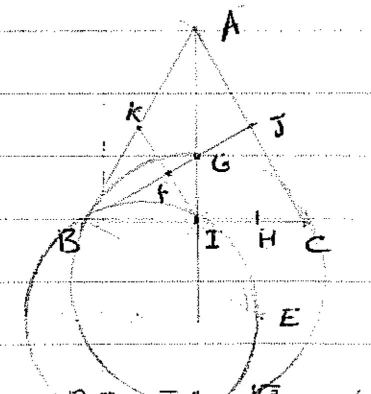
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

Exercice 5 :

dans le plan orienté, on considère le triangle équilatéral direct ABC de côté a ; $I = B*C$; $J = C*A$; $K = A*B$

$E = S_I(K)$

1)



2) a) on a : $BJ = IA = \frac{\sqrt{3}}{2}a \neq 0$ et $\overrightarrow{BI} \neq \overrightarrow{JA}$, donc il existe une unique rotation r_1 telle que

$B \xrightarrow{r_1} I$

$J \longmapsto A$

b)

. l'angle de r_1 est :

$$(\vec{BJ}, \vec{IA}) = (\vec{BJ}, \vec{BA}) + (\vec{BA}, \vec{IA})$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

. le centre de r_1 :

$\Omega = Méd[BI] \cap Méd[JA]$

$\Rightarrow \Omega = K$ donc $\boxed{r_1(K, \frac{\pi}{3})}$

autre Méthode :

on a $(\vec{KB}, \vec{KC}) = (\vec{KJ}, \vec{KA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

et $KB = KC$; $KJ = KA$ donc

$r_1(K, \frac{\pi}{3})$

3) $t = t_{\vec{AJ}}$, $r_2 = t \circ r_1$; $f = S_{JC} \circ S_{JE} \circ S_{KE}$

a) $r_2(J) = t \circ r_1(J)$

$= t_{\vec{AJ}}(A) = J$

r_2 est la composée d'une rotation et d'une translation donc

r_2 est une rotation d'angle

$\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{3}$ et de centre J car

$r_2(J) = J$, d'où $\boxed{r_2(J; \frac{\pi}{3})}$

b) . $r_1 = S_{KC} \circ S_{\Delta_1}$

comme $\begin{cases} (\vec{KI}, \vec{KC}) = \frac{\pi}{6} [2\pi] \\ \text{et} \\ (KI) \cap (KC) = K \end{cases}$ alors

$r_1 = S_{KC} \circ S_{KI}$ et par suite

$\Delta_1 = (KI)$

. $r_2 = S_{JC} \circ S_{\Delta_2}$

comme $\begin{cases} (\vec{JE}, \vec{JC}) = \frac{1}{2}(\vec{JI}, \vec{JC}) = \frac{\pi}{6} [2\pi] \\ \text{et} \\ (JE) \cap (JC) = J \end{cases}$

alors $r_2 = S_{JC} \circ S_{(JE)}$ et par suite $\Delta_2 = (JE)$

on a : $f = S_{JC} \circ S_{JE} \circ S_{KE} = r_2 \circ S_{KE}$

$= t \circ r_1 \circ S_{KE} = t \circ S_{KC} \circ S_{KE} \circ S_{KE}$

or $(KI) = (KE)$ donc $S_{KI} \circ S_{KE} = id$

d'ou $f = t \circ S_{KC} = t_{\vec{AJ}} \circ S_{KC}$

Enfin $\boxed{f = t_{\vec{AJ}} \circ S_{KC}}$

c) l'image du triangle BIK

. $f(B) = t_{\vec{AJ}} \circ S_{KC}(B) = t_{\vec{AJ}}(A) = J$

. $f(I) = t_{\vec{AJ}} \circ S_{KC}(I) = t_{\vec{AJ}}(J) = C$

. $f(K) = t_{\vec{AJ}} \circ S_{KC}(K) = t_{\vec{AJ}}(K) = I$

donc l'image du triangle BIK est le triangle JCI

. f est la composée de trois reflexions alors f est une reflexion ou une symétrie glissante, d'autre part

$f \circ f(K) = f(I) = C \neq K$

donc f est une symétrie glissante

En effet si f est une reflexion alors $f \circ f = id$.

. la forme réduite de f : $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$

on a $f(B) = J \Rightarrow F = B * J \in \Delta$

$f(I) = C \Rightarrow H = I * C \in \Delta$

d'ou $\Delta = (FH)$

. $f \circ f = t_{2\vec{u}}$ or $f \circ f(K) = C$

$\Rightarrow 2\vec{u} = \vec{KC} = 2\vec{FH} \Rightarrow \vec{u} = \vec{FH}$

Enfin $\boxed{f = t_{\vec{FH}} \circ S_{(FH)}}$

4) a) on a $EC \neq 0$ et $IG \neq 0$,

donc il existe une unique similitude directe S qui transforme E en I et C en G

b) l'angle de S est :

$\theta = (\vec{EC}, \vec{IG}) = (\vec{IJ}, \vec{IG})$

$= (\vec{IJ}, \vec{IA}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$

. le rapport de S : $E \xrightarrow{S} E$, $C \longmapsto G$

$K = \frac{EG}{CG}$; $IG = \frac{1}{3} AI = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$CG = \frac{1}{2} a$ donc $\boxed{K = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

c) soit Ω le centre de S :

on a : $(\vec{\Omega E}, \vec{\Omega I}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et

$(\vec{\Omega C}, \vec{\Omega G}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$

or $(\vec{BE}, \vec{BI}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et

$(\vec{BC}, \vec{BG}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$

d'où $\begin{cases} (\vec{\Omega E}, \vec{\Omega I}) = (\vec{BE}, \vec{BI}) [2\pi] \\ \text{et} \\ (\vec{\Omega C}, \vec{\Omega G}) = (\vec{BC}, \vec{BG}) [2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} E, I, B \text{ et } \Omega \text{ sont cocycliques} \\ \text{et} \\ B, C, G \text{ et } \Omega \text{ sont cocycliques} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \Omega \in \mathcal{C}(EIB) \\ \text{et} \\ \Omega \in \mathcal{C}(BCG) \end{cases}$

or $B \in \mathcal{C}(EIB) \cap \mathcal{C}(BCG)$

et $\begin{cases} (\vec{BC}, \vec{BG}) = (\vec{EC}, \vec{EG}) [2\pi] \\ \frac{BG}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} = K \end{cases}$

donc $\Omega = B$

Enfin $\boxed{S\left(B ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{\pi}{6}\right)}$

5) $\Gamma = \mathcal{C}_{[BC]}$; $M \in \Gamma$; $S(M) = M'$

a) M décrit Γ donc Γ' décrit $S(\Gamma)$; or $S(B) = B$ et $S(C) = G$

comme $\Gamma = \mathcal{C}_{[BC]}$ alors

$\Gamma' = S(\mathcal{C}_{[BC]}) = \mathcal{C}_{[BG]}$

d'où :

Γ' : le cercle de diamètre $[BG]$

b) soit $M \in \Gamma \setminus \{B\}$

on a $K \in \mathcal{C}_{[BC]}$ donc K, B, C et M sont cocycliques $\Rightarrow$

$(\vec{BM}, \vec{BK}) = (\vec{CM}, \vec{CK}) [\pi]$ de

même $K \in \mathcal{C}_{[BG]} \Rightarrow$

$(\vec{BK}, \vec{BM'}) = (\vec{GK}, \vec{GM'}) [\pi]$

or

$(\vec{KM},\vec{KM'}) = (\vec{KM},\vec{KB}) + (\vec{KB},\vec{KM'})\ [2\pi]$

$= (\vec{CM},\vec{CB}) + (\vec{GB},\vec{GM'})\ [\pi]$

$= (\vec{CM},\vec{GM'}) + (\vec{GM'},\vec{CB})$

$+ (\vec{GB},\vec{GM'})$

$= (\vec{CM},\vec{GM'}) + (\vec{GB},\vec{CB})$

d'autre part $C \xrightarrow{S} G$, $M \longmapsto M'$

$\Rightarrow (\vec{CM},\vec{GM'}) = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et

$(\vec{GB},\vec{CB}) = (\vec{BG},\vec{BC}) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

et par suite

$(\vec{KM},\vec{KM'}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\ [\pi]$

$\Rightarrow (\vec{KM},\vec{KM'}) = 0\ [\pi]$

$\Rightarrow$ K, M et M' sont alignés

$\Rightarrow$ la droite (MM') passant par K.

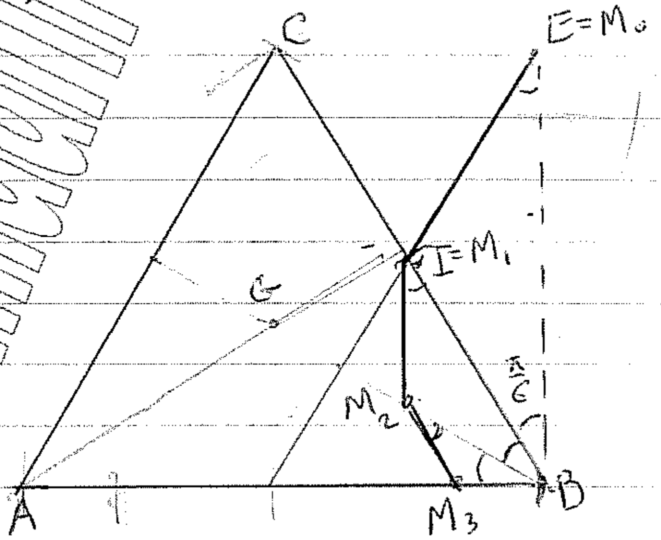
c) la droite (KM) coupe Γ en M'

$\Rightarrow M' = \Gamma \cap (KM)$

6) $\forall n \geq 2$, $S^2 = S \circ S$ et $S_n = S \circ S^{n-1}$

$M_0 = E$, $M_1 = S(M_0)$ et $M_n = S^n(M_0)$

d)



b) $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$

On pose $U_n = M_nM_{n+1}$ donc

$U_{n+1} = M_{n+1}M_{n+2}$ d'autre part

$M_n \xrightarrow{S} M_{n+1}$, $M_{n+1} \longrightarrow M_{n+2}$ $\Rightarrow \frac{M_{n+1}M_{n+2}}{M_nM_{n+1}} = k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow (U_n)$ est une suite géométrie de raison

$q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et 1er terme

$u_0 = M_0M_1 = EI = BI = \frac{BE}{\sqrt{3}}$

$u_0 = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

ainsi

$S_n = 2\sqrt{3}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{6\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right)}{\sqrt{3}-1}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{6}{\sqrt{3}-1} \Rightarrow$

la longueur de la ligne

brisée $M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$

d)

$M_{1960} = S^{1960}(M_0)$

$= S^{1956}(M_4)$

or S^{1956} est une similitude

d'angle $1956 \times \frac{\pi}{6} = 326\pi = 0\,[2\pi]$

et de rapport $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{1956}$ et

de centre B donc

$S^{1956} = h\left(B, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{1956}\right)$

$\Rightarrow M_{1960} \in (BM_4)$

$2012 = 6\times 335 + 2$

$S^{2012} = S^2 \circ S^{6\times 335}$

$M_{2012} = S^{2012}(M_0)$

$= S^{6\times335}\circ S^2(M_0)$

or $S^2(M_0) \in (BG)$ donc

$M_{2012} \in (BG)$