Ex$_1$: Nombres complexes

$P(z) = z^3 - (4-2i)z^2 + (4-6i)z - 4 + 8i$

1) a) $P(-2i) = 8i + 16 - 8i - 8i - 12 - 4 + 8i = 0$

b) $(z+2i)(z^2+az+b) = z^3 + az^2 + bz + 2iz^2 + 2iaz + 2ib = z^3 + (a+2i)z^2 + (b+2ia)z + 2ib = z^3 - (4-2i)z^2 + (4-6i)z - 4+8i$

$\Rightarrow \begin{cases} a+2i = -4+2i \Rightarrow a = -4 \\ 2ib = -4+8i \Rightarrow b = 4+2i \end{cases}$

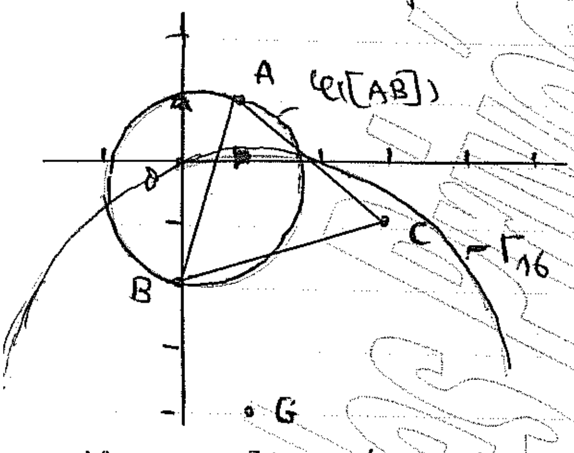
$P(z) = 0 \Leftrightarrow z+2i = 0$ ou $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$

$\Delta = -8i = (2-2i)^2$

$z_1 = 1+i$; $z_2 = 3-i$

2) $A(1+i)$; $B(-2i)$; $C(3-i)$

a) Placer les points :



b) $z_G = \dfrac{3z_O - 4z_A + z_B + 2z_C}{2} = \dfrac{2-8i}{2} = 1-4i$

$z_G = 1-4i$

Vérification :

$z_A = \dfrac{5z_O - 5z_B + 2z_G}{2} = \dfrac{10i + 2 - 8i}{2} = 1+i$

c) $\dfrac{z-1-i}{z+2i} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = 1+i$

$\Leftrightarrow M = A$ ou $\arg\left(\dfrac{MA}{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$

$\Rightarrow M \in \mathcal{C}([AB]) / \{B\}$

3) $\varphi(M) = 3MO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 2MG^2 + \varphi(G)$

$\varphi(G) = 3GO^2 - 4GA^2 + GB^2 + 2GC^2 = 51 - 100 + 5 + 26 = -18$

$M \in \Gamma_k \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{18+k}{2}$

- si $k < -18$ $\Gamma_k = \emptyset$
- si $k = -18$ $\Gamma_k = \{G\}$
- si $k > -18$ $\Gamma_k = \mathcal{C}\left(G, \sqrt{\dfrac{18+k}{2}}\right)$

$\Gamma_{16} = \mathcal{C}(G, \sqrt{17})$.

Or on a $\varphi(O) = -4OA^2 + OB^2 + 2OC^2 = -8 + 4 + 20 = 16 \Rightarrow O \in \Gamma_{16}$

$\Rightarrow \Gamma_{16} = \mathcal{C}(G, OG)$

Ex$_2$: Fonctions

$f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ $\quad x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

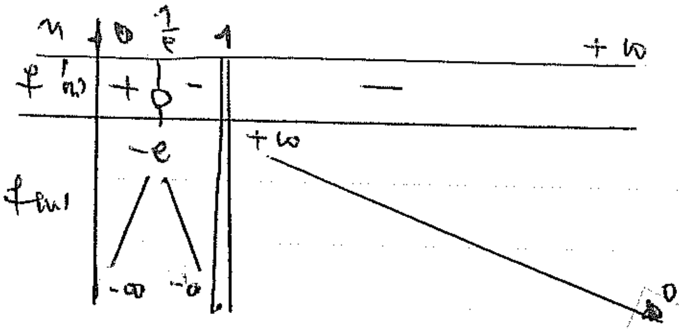
$x = 0$ A.V ; $x = 1$ A.V ; $y = 0$ A.H

b) $f'(x) = \dfrac{-(1+\ln x)}{(x\ln x)^2}$

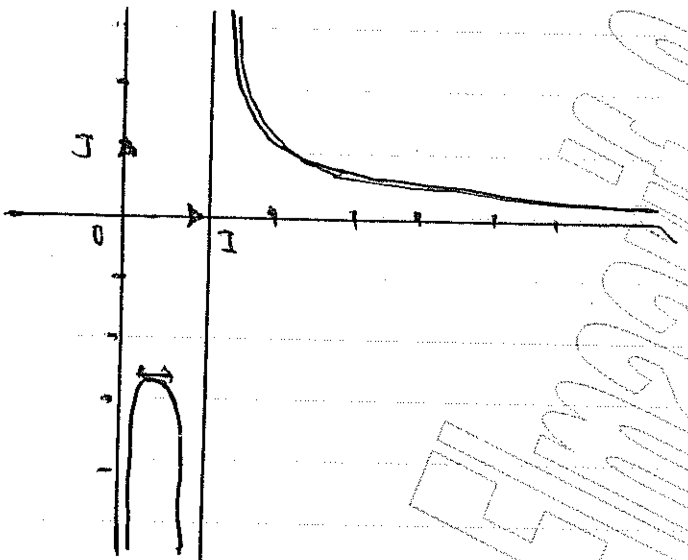
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

$f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -e$

On dresse le T.V de $f(x)$:



c) Tracé de la courbe :



2) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\ln k} - \ln \ln n$

a) f est décroissante sur $]1,+\infty[$

$$n \leq t \leq n+1$$

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq f(t) \leq \frac{1}{n\ln n}$$

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n\ln n}$$

b) $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k\ln k} - \ln(\ln n+1)$

$- \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\ln k} + \ln(\ln n) =$

$= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - (\ln(\ln n+1) - \ln \ln n)$

$= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq 0$

u_n est donc décroissante.

c) On a pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n\ln n}$$

donc $\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{n\ln n}$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq f(n+1) - f(n)$

et on a donc :

$u_{n+1} - u_n \geq f(n+1) - f(n)$

On a $\oplus$ $u_n - u_{n-1} \geq f(n) - f(n-1)$

$\oplus$

$\vdots$

$\oplus$ $u_3 - u_2 \geq f(3) - f(2)$

$u_{n+1} - u_2 \geq f(n+1) - f(2)$

$u_n - \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln 2) \geq \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{2\ln 2}$

$u_n + \ln(\ln 2) \geq \frac{1}{n\ln n} \geq 0$

$\Rightarrow u_n \geq -\ln(\ln 2)$

d) Comme u_n est décroissante minorée elle converge, et on a

$-\ln(\ln 2) \leq u_n \leq u_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$-\ln(\ln 2) \leq u_n \leq \frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2)$

donc :

$-\ln(\ln 2) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2)$

$-\ln(\ln 2) \leq \ell \leq \frac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2)$

Ex3 : $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x}$

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{e^x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{e^x} = +\infty$.

$y = 0$ A.H (au voisinage de $+\infty$)

C_f admet une B.P direction (Oy) au voisinage de $-\infty$.

b) $f'(x) = \left(\dfrac{2x^3-3x^2+1}{e^x}\right)'$

$= \dfrac{(6x^2-6x)e^x - e^x(2x^3-3x^2+1)}{e^{2x}}$

$= e^{-x}(-2x^3+9x^2-6x-1)$

$f'(x) = 0 \iff -2x^3+9x^2-6x-1 = 0$

on a $-2+9-6-1=0 \Rightarrow x_0 = 1$

On factorise par $x-1$; on a

$f'(x) = (x-1)(-2x^2+7x+1)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \iff x = 1$ ou $-2x^2+7x+1 = 0$

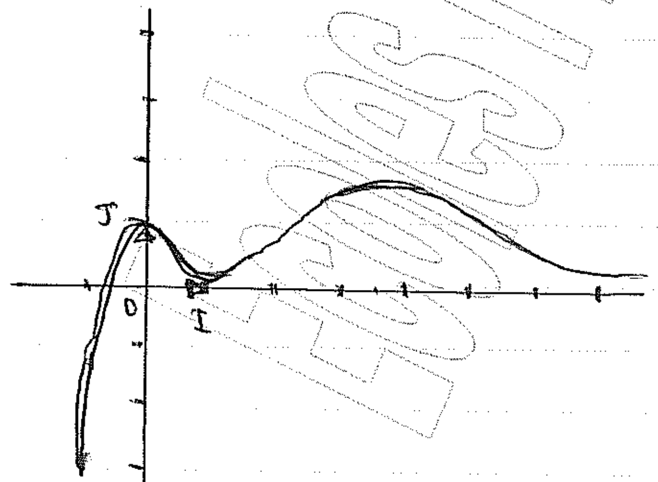
$\Delta = 57$; $x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{57}}{-4} = \dfrac{7+\sqrt{57}}{4}$

$x_2 = \dfrac{7-\sqrt{57}}{4}$

T.V de f :

x	$-\infty$		x_2		1		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0

c) Courbe de f :



3) a) $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$

La fonction $x^n e^{-x}$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$ donc la suite I_n est bien définie

b) $x \in [0,1] \Rightarrow x^n e^{-x} \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}(x-1)\,dx \leq 0$

$\Rightarrow I_n$ est donc décroissante $\searrow$.

et comme I_n est décroissante minorée par 0 elle converge.

c) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n$

$\Rightarrow \dfrac{1}{e(n+1)} \leq \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \leq \dfrac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

4) a) $I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-1}$

$I_0 = 1 - \dfrac{1}{e}$

b) $u' = x^n \longrightarrow u = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$v = e^{-x} \longrightarrow v' = -e^{-x}$

$I_n = \left[-\dfrac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x}\right]_0^1 + \dfrac{1}{n+1} I_{n+1}$

$= \dfrac{1}{n+1} e^{-1} + \dfrac{1}{n+1} I_{n+1}$

$\Rightarrow (n+1)I_n = \dfrac{1}{e} + I_{n+1}$

$\Rightarrow I_{n+1} = \dfrac{-1}{e} + (n+1)I_n$

c) $A = \int_0^1 f(x)\,dx$

$= \int_0^1 (2x^3-3x^2+1)e^{-x}\,dx$

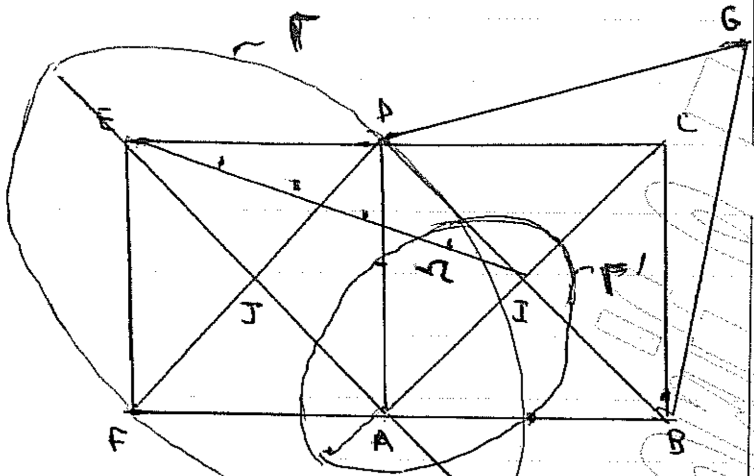
$= \int_0^1 2x^3 e^{-x}\,dx - \int_0^1 3x^2 e^{-x}\,dx + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$= 2\int_0^1 x^3 e^{-x}\,dx - 3\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$= 2I_3 - 3I_2 + I_0$

Ex4 : Transformations :

1) a) Figure :



b) $DF = GB$ et $(\vec{DF}, \vec{GB}) \neq 0$

Donc il existe une unique rotation r_1 qui transforme D en G et F en B

$\alpha = (\vec{DF}, \vec{GB}) = (\vec{DF}, \vec{DB}) + (\vec{DB}, \vec{GB})$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\Omega_1 = med[DG] \cap med[FB]$.

c) $r_2 : \begin{matrix} G \longrightarrow E \\ B \longrightarrow A \end{matrix}$

$\alpha = (\vec{GB}, \vec{EA}) = (\vec{GB}, \vec{DB}) = \frac{\pi}{3}$

$\Omega_2 = med[GE] \cap med[AB]$.

d) $r = r_2 \circ r_1$

$r(D) = r_2(r_1(D)) = r_2(G) = E$

$r(F) = r_2(r_1(F)) = r_2(B) = A$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

$\Omega = med[DE] \cap med[FA] = J$

$r = r(J, \frac{\pi}{2})$

2) $S = h_{(B, \frac{1}{2})} \circ r_{(J, \frac{\pi}{2})}$

S est la composée d'une homothétie et d'une rotation donc c'est une similitude de rapport $k = \frac{1}{2}$ d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$

b) $S(\Omega) = \Omega$; et on a

$S(E) = A$ et $S(A) = I$

d'où ΩAE et ΩAI sont rectangle en $\Omega \Rightarrow \Omega \in \mathcal{C}(AE) \cap \mathcal{C}(AI)$

c) on a $(\vec{\Omega I}, \vec{\Omega E}) = (\vec{\Omega I}, \vec{\Omega A}) + (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega E})$

$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$

donc Ω, I, E sont alignés.

et on a $S \circ S = h(\Omega, -\frac{1}{4})$

$S \circ S(E) = I \Rightarrow \vec{\Omega I} = -\frac{1}{4}\vec{\Omega E}$

$\Rightarrow \Omega = bar \begin{array}{c|c} I & E \\ 4 & 1 \end{array}$

3) $\Gamma = \{M \in P \;/\; MA + ME = 2a\}$

a) On a $AE = a\sqrt{2} < 2a$

Γ est une ellipse de foyers A et E

et on a $DA + DE = a + a = 2a$

$D \in \Gamma$.

b) Les sommets sont D, F, S et S' avec $JS = JS' = a$

d'où $\{S, S'\} = \mathcal{C}(J, a) \cap (AE)$

L'excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Γ' est une ellipse de foyers $I = S(A)$ et $A = S(E)$

et d'excentricité $e' = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}JE}{\frac{1}{2}AD}$

$e' = \frac{\sqrt{2}}{2}$.