LEÇON

68

Différents types de raisonnement en mathématiques

Niveau : Lycée

Prérequis : vocabulaire de la logique : assertion, implication, équivalence, quantificateurs, négation

1 Introduction

La place de la logique et du raisonnement est très importante dans les programmes du secondaire. En effet, l'étude des formes diverses de raisonement et la nécessité de distinguer implication et causalité sont essentielles à la formation mathématique.

Ainsi, les mathématiques vont permettent de distinguer le vrai du faux grâce à la mise en place d'une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante pour tous : il s'agit du raisonnement. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer à autrui. Reste à savoir quel type de raisonnement il faut mener pour arriver au résultat attendu.

2 Raisonnement direct

Définition 68.1

Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on veut monntrer qu'alors Q est vraie. C'est la méthode la plus fréquemment utilisée.

Remarque 68.2. Dans le cas où P est fausse alors l'assertion « $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelque soit la valeur de vérité de Q.

Exemples 68.3.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $16n^2 - 48n + 33 \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Q}_*^+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.

Développement

Résolutions.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Puisqu'un produit, une somme et une différence d'entiers naturels relatifs sont des entiers relatifs, on en déduit que $16n^2 - 48n + 33$ est un entier relatif.
   D'autre part, on a l'égalité :
   $$16n^2 - 48n + 33 = 4(2n-3)^2 - 3.$$
   Puisque, $n \in \mathbb{Z}$, $2n - 3 \in \mathbb{Z}^*$ et donc $|2n-3| \leq 1$. D'où $(2n-3)^2 \leq 1$. Il s'en suit que l'on a
   $$4(2n - 3ř^2 - 3 \leq 4 - 3 = 1.$$
   Donc : $16n^2 - 48n + 33 \in \mathbb{N}$. On a ainsi démontré que pour tout entier relatif n, $16n^2 - 48n + 33 \in \mathbb{N}$.
2. Soit $x \in \mathbb{Q}_*^+$. Il existe deux entiers p, q ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) tel que $x = \frac{p}{q}$. Comme q est un entier strictement positif, $q \geq 1$, alors $p = xq \geq x$. En particulier, $p > 0$. D'où $2p > P$. Il vient $2p > x$. Comme $2p \geq 0$, $2p \in \mathbb{N}$. Donc $n = 2p$ convient.

□

3 Raisonnement par disjonction des cas (ou cas par cas)

Définition 68.4

Raisonnement par disjonction des cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E puis pour tous les x n'appartenant pas à A. C'est la *méthode de disjonction* ou du cas par cas.

Remarque 68.5. Finalement, on partitionne E en $E = A \cup E \setminus A$.

Exemples 68.6.

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

Développement

Résolutions.

1.

1er cas a **ou** b est multiple de 3. Si $3 \mid a$ alors $3 \mid ab(a^2 - b^2)$ et si $3 \mid b$ alors $3 \mid ab(a^2 - b^2)$. Dans ce premier cas, l'assertion eset vraie.

2e cas a **et** b ne sont pas multiples de 3. Tout entier naturel s'écrit sous la forme $3k$, $3k+1$, $3k+2$ où $k \in \mathbb{N}$. Comme a et b ne sont pas multiples de 3, ils s'écrivent sous la forme $3k+1$ ou $3k-1$ (qui revient à la forme $3k+2$). On peut alors montrer, en distinguant les cas, que $a^2 - b^2$ est divisible par 3.

- Si $a = 3k+1$ et $b = 3k'+1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$:

$$a^2 - b^2 = (3k+1)^2 - (3k'+1)^2 = 9(k^2 - k'^2) + 6(k - k') = 3(3(k^2 - k'^2) + 2(k - k')).$$

  Donc $3 \mid a^2 - b^2$ et par suite, $3 \mid ab(a^2 - b^2)$.
- Si $a = 3k+1$ et $b = 3k'-1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$ ...
- Si $a = 3k-1$ et $b = 3k'-1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$ ...
- Si $a = 3k-1$ et $b = 3k'+1$ avec $k, k' \in \mathbb{N}$ ...

2.

1er cas $x \leq y$. Comme $x \leq y$, $x - y \leq 0$ et donc $|x - y| = -(x - y)$. D'où :

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - (x - y)) = y$$

qui est bien le max entre x et y dans ce cas.

2e cas $x > y$. Comme $x > y$, $x - y > 0$ et donc $|x - y| = x - y$. D'où :

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + (x - y)) = x,$$

qui est bien le max entre x et y dans ce cas.

On conclut finalement que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

Remarque 68.7. On aurait pu prouver de la même manière que $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

□

4 Raisonnement par contraposition

Définition 68.8

Raisonnement par contraposition

Le *raisonnement par contraposition* permet de démontrer qu'une implication de type $(P \Rightarrow Q)$ est vraie. Ce raisonnement est basé sur l'équivalence suivante :

$$\text{l'assertion } (P \Rightarrow Q) \text{ est équivalente à } (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \Rightarrow Q$ », on montre en fait que si $\neg Q$ est vraie alors $\neg P$ est vraie.

Exemples 68.9.

1. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow (a = 0)$.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que :

$$(\forall k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \mid \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) \Rightarrow (\forall k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \mid a_k) \vee (\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ p \mid b_i).$$

Développement

Résolutions.

1. Prenons l'énoncé contraposé : $(a \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ |a| > \varepsilon)$. Ceci est immédiat. En effet, si on a $a \neq 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. On a bien $\varepsilon > 0$ et $|a| > \frac{|a|}{2} = \varepsilon$.
2. Procédons par contraposée, ce qui donne à démontrer :

$$(\exists k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \nmid a_k) \wedge (\exists i,\ 0 \leq i \leq n,\ p \nmid b_i) \Rightarrow (\exists k,\ 0 \leq k \leq n,\ p \nmid \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}).$$

Si p ne divise pas tous les a_k, soit r le premier indice tel que p ne divise pas a_r (donc p divise tous les précédents). De même, soit s le premier indice tel que p ne divise pas b_s. Alors p ne divise pas $a_0 b_{r+s} + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_{r+s} b_0$ puisqu'il divise tous ces termes sauf $a_r b_s$. On utilise la propriété qui nous dit qu'un nombre premier divise un produit de facteurs alors il divise l'un de ses facteurs. On a donc trouvé $k = r + s$ tel que p ne divise pas $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

□

5 Raisonnement par l'absurde

Définition 68.10

Raisonnement par l'absurde
Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer l'implication « $P \Rightarrow Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi, si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \Rightarrow Q$ » est vraie.

Exemples 68.11.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ mais ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f garde un signe constant strict sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $(n+1)$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[0\,,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. Montrer qu'il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$.

Développement

Résolutions.

1. On veut prouver « f est stricteent positive sur $\mathbb{R}$ **ou** f est strictement négative sur $\mathbb{R}$ ». Supposons que ce résultat soit faux. On suppose donc :

$$(\exists a \in \mathbb{R},\ f(a) \leq 0) \quad \text{et} \quad (\exists b \in \mathbb{R},\ f(b) \geq 0).$$

Mais comme on sait que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on est certain que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (et par conséquence $a \neq b$.
Ainsi f est continue sur le segment d'extrémités a et b et $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes opposés. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer l'existence d'un réel c tel que $f(c) = 0$.
Ce qui est absurde car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par un raisonnement par l'absurde, on a montré que si f est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors f garde un signe constant.

2. On veut montrer qu'il existe i tel que $1 \leq i \leq n$ et $x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}$. Supposons que ce résultat soit faux, c'est-à-dire montrons que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}.$$

On a :

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) > n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Ce qui est absurde car la longueur de l'intervalle ne peut excéder 1. La propriété initiale est donc vraie.

□

Remarque 68.12. Dans la pratique, on peut choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou par l'absurde.

6 Raisonnement par utilisation d'un contre-exemple

Définition 68.13

Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E, il faut montrer que $P(x)$ est vraie.

Par contre, pour montrer que cette assertion est fausse, il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Trouver un tel x, c'est trouver un *contre-exemple* à l'assertion « $\forall x \in E,\ P(x)$ ».

Exemples 68.14.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si ($f \geq 0$ et $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$) alors f est identiquement nulle sur $[0\,,1]$.

2. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites qui n'admettent pas de limite alors la suite $(u_n v_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite.

Développement

Solution.

1. Pour montrer que cette implication est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. On prend la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left]0\,,1\right] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a bien $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ mais f n'est pas identiquement nulle sur $[0\,,1]$.

2. Pour montrer que cette implication est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. On prend les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = (-1)^n$. Ces deux suites n'admettent pas de limites. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n v_n = (-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = 1.$$

Donc, la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et elle a pour limite 1.

□

Définition 68.15

Principe de récurrence

Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendante de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en 3 étapes :

Étape 1 - Initialisation : On prouve que $P(0)$ est vraie.

Étape 2 - Hérédité : On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie et on démontre que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Étape 3 - Conclusion : On rappelle que, par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques 68.16.

a. Le principe de récurrence est basé sur la construction de $\mathbb{N}$. En effet, un des axiomes pour définir $\mathbb{N}$ est le suivant : « Soit A une partie de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et telle que si $n \in A$ alors $n+1 \in A$, on a : $A = \mathbb{N}$.

b. La récurrence présentée ci-dessus est une récurrence dite simple mais il existe aussi des récurrences doubles, triples, etc.. . .

Dans ce cas, par exemple pour une récurrence triple, les trois étapes deviennent :

Étape 1 - Initialisation : On prouve que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

Étape 2 - Hérédité : On suppose $n \geq 3$ donné avec $P(n-3)$, $P(n-2)$ et $P(n-1)$ vraies et on démontre que l'assertion $P(n)$ est vraie.

Étape 3 - Conclusion : On rappelle que, par le principe de récurrence triple, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lorsqu'on ne sait pas à l'avance combien de rangs il faut supposer vrais avant d'en déduire l'hérédité, on utilise le principe de récurrence forte. Dans l'étape 2 d'hérédité, on fixe $n \geq 0$ et on suppose que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $P(k)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie. Dans la conclusion, on invoque le principe de récurrence forte.

Exemples 68.17.

1. Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ S_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k S_k. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $S_n \leq n!$ » est vraie.

2. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions polynomes définie par :

$$\begin{cases} f_0(x) = 2 \\ f_1(x) = x \\ f_{n+2}(x) = x f_{n+1}(x) - f_n(x), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.

Développement

Résolutions.

1. On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $S_n \leq n!$ » est vraie.

Initialisation $S_0 = 1 \leq 0! = 1$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité Fixons $n \geq 0$. On suppose que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $P(k)$ est vraie et on veut montrer que $P(n+1)$ est vraie :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k S_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! \quad \text{car, pour tout } 0 \leq k \leq n,\ S_n \leq k!, \text{ d'après l'hyp. de récurrence.}$$

D'où :

$$S_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}.$$

Or, $0 \leq k \leq n$, $(n-k)! \geq 1$, donc $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$. Il vient alors :

$$S_{n+1} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^{n} 1 = n! \times n = (n+1).$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion Par le principe de récurrence forte sur $\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En exercice ! (utiliser la récurrence double)

□

8 Raisonnement par analyse-synthèse

Définition 68.18

Raisonnement par analyse-synthèse

Pour justifier l'existence et parfois l'unicité d'une solution, on peut être amené à déterminer la forme de cele-ci (forme qui n'est pas nécessairement donnée dans l'énoncé). On raisonne par *analyse-synthèse*.

Analyse : On suppose qu'il existe au moins une solution et on essaie d'en tirer le maximum de renseignement la concernant. Cette étape assure parfois *l'unicité*.

Synthèse : On reporte dans le problème la ou les solutions trouvées précédemment, ce qui permet de déterminer s'il y a bien une solution au problème, puis une unique ou plusieurs. Cette étape assure *l'existence*.

Exemples 68.19.

1. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire d'une seule façon sous la forme $f = p + i$, où p est une fonction paire et i est une fonction impaire.
2. Recherche de lieu géométrique, par double inclusion.

Théorème 68.20

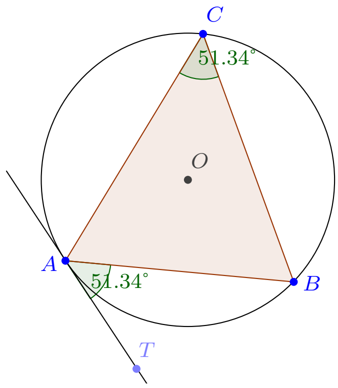
Arc capable

Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$ fixés et $\theta \in \mathbb{R}$. On note

$$E_\theta = \left\{ M \in \mathcal{P},\ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta \pmod{\pi} \right\}.$$

a. Si $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$ alors $E_0 = (AB) \setminus \{A, B\}$.

b. Si $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ alors E_θ est le cercle passant par A et B, privé des points A et B, tagent à la droite (AT) en A où T est un point du plan défini par $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta \pmod{\pi}$.



Développement

Démonstration.

1. **Analyse :** Supposons qu'il existe une fonction p paire et i impaire telles que $f = p + i$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = p(x) + i(x).$$

Comme p est paire et i est impaire, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x).$$

On a donc :

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(x) - i(x) \end{cases}.$$

Par somme, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Par différence, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Pour l'instant, nous avons juste prouvé que si f se décompose sous la forme $f = p + i$ avec p paire et i impaire alors nécessairement p et i sont définies à partir de f comme précédemment. Elles sont donc uniques mais leur existence n'est pas encore démontrée.

Synthèse : Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définissons à partir de f deux fonctions p et i par les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On vérifie que c'est bien une solution du problème posé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) + i(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x),$$

p est donc bien une fonction paire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x),$$

i est donc bien une fonction impaire. Ceci prouve qu'on a bien l'existence d'une solution et exactement d'une seule solution d'après la partie synthèse.

Conclusion : Par analyse-synthèse, on a démontré que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe un unique couple (p, i) tel que $f = p + i$ avec p est une fonction paire et i est une fonction impaire.

2. **a.** immédiat

b.

Analyse : Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\}$ tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \equiv \theta \pmod{\pi}$. Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit (intersection des médiatrices) au triangle MAB. On a, d'après le théorème de l'angle au centre :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 2\theta \pmod{2\pi}.$$

Dans le triangle ABO, on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Comme ABO est un triangle isocèle, on a que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta \pmod{\pi}.$$

Autrement dit, la tangente au cercle en A fait un angle θ avec (AB). Donc M appartient au cercle passant par A et B de centre O, tangent à la droite (AT) en A, où T est un point du plan défini par $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta \pmod{\pi}$. D'où $E_\theta \subset \mathcal{C} \setminus A, B$.

Synthèse : Réciproquement, soit $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$. On note $\theta' = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. D'après ce qui précède,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta' \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta \pmod{\pi}.$$

D'où $\theta = \theta'$ et $M \in E_\theta$. Ainsi, $\mathcal{C} \setminus \{A, B\} \setminus E_\theta$.

Finalement, $E_\theta = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$.

□

9 Propositions de questions posées par le Jury

1. On estime à 1100000 le nombre d'habitants dans la métropole lilloise. On suppose que peronne ne possède plus de 800000 cheveux sur sa tête. Que peut-on affirmer ?
2. Démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On pourra supposer que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et définir l'ensemble $A = \left\{n \in \mathbb{N}^*,\ n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\right\}$.
3. Peut-on calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$?
4. Existe-il $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$ tel que $\alpha^\beta \in \mathbb{Q}$?
5. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que dans toute boite de n crayons de couleur, tous les crayons sont de la même couleur.

   Initialisation : La propriété est vraie pour $n = 1$.

   Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$. On considère alors une boite de $(n + 1)$ crayons de couleur, que l'on numérote de 1 à $n + 1$. En enlevant le dernier crayon, on obtient une sous-boite qui, par hypothèse de récurrence, ne contient que des crayons de la même couleur. De même en enlevant le premier crayon. Les couleurs des deux sous-boites sont identiques, car il s'agit de la couleur des crayons communs aux deux sous-boites. D'où le résultat.

   Où est l'erreur ?