

Exercice 1 : (3 points)

1° On considère l'équation (E) : $13x - 15y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer l'entier naturel p tel que le couple $(p + 1 ; p)$ soit solution de (E). 0.5 pt

b) Résoudre l'équation (E). 0.5 pt

2° Dans cette question on se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs N tels que

$$\begin{cases} N \equiv 5 [13] \\ N \equiv 10 [15] \end{cases}$$

a) Soit N un élément de S . Démontrer qu'il existe un couple d'entiers $(x; y)$ tel que

$$N = 13x + 5 = 15y + 10 \text{ où } (x; y) \text{ est une solution de (E)}$$
0.5 pt

b) En déduire que $N \in S$ si et seulement si $N \equiv 70 [195]$. 0.5 pt

c) Déterminer le plus petit élément A de S qui est supérieur ou égal à 2000. 0.5 pt

d) Soit n un entier naturel non nul. Supposons que le nombre A , de la question précédente, s'écrit COVID dans un système de base n , où les lettres C, O, V, I et D représentent des chiffres distincts de ce système. Justifier que n ne peut être, ni supérieur à 6, ni inférieur à 5 puis déterminer n et préciser l'écriture de A dans ce système. 0.5 pt

Exercice 2 : (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Pour tout nombre complexe z on pose :

$$P(z) = z^3 + (1 - 2i)z^2 - (5 + 3i)z + 4 - 8i$$

1° Calculer $P(-i)$ et En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$. 1 pt

2° On note A , B et C les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $|z_B| < |z_A| < |z_C|$.

a) Placer les points A , B et C puis déterminer la nature du triangle ABC . 0,5 pt

b) Soit G le barycentre du système $\{(A; 9), (B; -2), (C; 6)\}$. Vérifier que $z_G = 2i$ puis placer G . 0,5 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que $9MA^2 - 2MB^2 + 6MC^2 = 195$ 0,5 pt

d) Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan tels que $3MA^2 - 5MB^2 + 2MC^2 = 65$ 0,5 pt

e) Préciser la position relative entre les deux ensembles E et F . 0,25 pt

3° Soit f la transformation d'écriture complexe $z' = mz + (2 - 2m)i$ où m est un nombre complexe.

a) Résoudre l'équation $z' = z$ (discuter suivant les valeurs de m). 0,25 pt

b) Déterminer la valeur de m pour que $f(B) = A$, puis caractériser f dans ce cas. 0,5 pt

Exercice 3 : (4 points)

On considère un triangle isocèle direct ABC tel que $BC = 2a$ et $AB = AC = 3a$, a étant un réel strictement positif donné et soit $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \theta [2\pi]$. On note A' le milieu de $[BC]$, H l'orthocentre du triangle ABC et B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) .

1° Faire une figure. 1 pt

2° a) Montrer les égalités suivantes $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = CA \times CB'$ et $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = CB \times CA'$. 0.5 pt

b) En déduire la distance $B'C$ puis calculer la distance $B'A$. 0.5 pt

c) Justifier que $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = -\frac{7}{2}$ puis en déduire que $B' = \text{bar} \begin{bmatrix} A & C \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. 0.5 pt

d) On suppose que $G = \text{bar} \begin{bmatrix} A & B & C \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$.

Montrer que G appartient à chacune des hauteurs (AA') et (BB') puis reconnaître le point G . 0.5 pt

3° a) Montrer que les points A , B , A' et B' sont cocycliques, de même que les points H , C , A' et B' . 0.5 pt

b) Justifier que $(\overline{HA'}, \overline{HC}) = (\overline{CA}, \overline{CB}) [\pi]$ puis en déduire que $(\overline{HC}, \overline{HB}) = \theta [\pi]$. 0.5 pt

Exercice 4: (4 points)

I- 1° On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(0) = 0$ et $\forall x > 0$ $f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0. (on pourra écrire $f(x) = x \ln(x+1) - x \ln(x)$) 0,5pt

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$. 0,5pt

c) Etudier les variations de f' et en déduire que $\forall x > 0$, $f'(x) > 0$. 0,5pt

2° a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement. 0,25pt

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f et tracer sa courbe (C) 0,5pt

II- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -\frac{1}{x}(f(x) - 1) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

1° a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $g(n) = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$. 0,25pt

b) Justifier que $\forall n \geq 1$, on a : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$ et en déduire que $0 \leq g(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$. 0,5pt

2° Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la suite (U_n) par :

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$$

a) Montrer que $\forall n \geq 1$, $0 \leq g(n) + g(n+1) + g(n+2) + \dots + g(2n) \leq U_n$. 0,25pt

b) Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ et en déduire que $\forall n \geq 1$, $U_n = \frac{(n+1)}{n(2n+1)}$ 0,5pt

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} [g(n) + g(n+1) + \dots + g(2n)] = 0$. 0,25pt

Exercice 5 : (5 points)

1° Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+2)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer et interpréter les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. 1 pt

b) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative (C) . 1 pt

2° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J à déterminer. 0,5 pt

b) Tracer dans le repère précédent la courbe (C') de la fonction g^{-1} où g^{-1} est la réciproque de g . 0,25 pt

3° Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $I_n = \int_{-2}^0 \frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!} dx$ et $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!}$.

a) Vérifier que pour tout $x \in [-2; 0]$ on a : $0 \leq \frac{(x+2)^n}{n!} e^{-x} \leq \frac{2^n}{n!} e^2$. 0,25 pt

b) Justifier à l'aide d'une intégration par parties que $I_1 = e^2 - 3$. 0,5 pt

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = e^2 - U_n$. 0,5 pt

4° Soit $v_n = \frac{2^n}{n!}$. Montrer que $\forall n \geq 2$, $v_{n+1} \leq \frac{2}{3} v_n$ puis en déduire que $\forall n \geq 2$, $v_n \leq 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ et préciser la limite de (v_n) . 0,5 pt

5° En utilisant la question 3° a), justifier que $0 \leq I_n \leq 2e^2 \times v_n$ puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. 0,5 pt

Fin