

Exercice 1 : (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{2}{9}u_n$.

Soient $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ et $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de u_3 est	$\frac{17}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{14}{9}$	0,5 pt
2	La suite (u_n) est	Croissante	Décroissante	Non monotone	0,5 pt
3	La suite (v_n) est	Arithmétique	Géométrique	Ni arithmétique, ni géométrique	0,5 pt
4	Le terme général de (v_n) est	$2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$2 + \frac{2n}{3}$	$2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$	0,5 pt
5	La valeur de S_n est	$6 - 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\frac{(n+1)(n+6)}{3}$	$2n - 1 + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$	0,5 pt
6	La suite (v_n)	Converge vers 0	Converge vers 1	Diverge	0,5 pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 : (5 points)

Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - 3z - 1 - 8i$.

1° a) Calculer $P(-i)$.

0,5pt

b) Déterminer les complexes a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$.

0,5pt

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$.

0,5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -i$; $z_B = -1 + 2i$ et $z_C = 2 + 3i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) . Déterminer la nature du triangle ABC .

0,75pt

b) Placer le point D d'affixe $z_D = 3$ et préciser la nature du quadrilatère $ABCD$.

0,5pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 2 + 3i$, on pose $f(z) = \frac{z+i}{z-2-3i}$

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$

0,5 pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que

$$\arg[f(z)] = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

0,5 pt

c) Justifier que les ensembles Γ_1 et Γ_2 passent par les points B et D .

0,25pt

4° Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = (z_B - i)^n$. Soit M_n le point d'affixe z_n et $d_n = |z_n|$

a) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles M_n appartient à l'axe des abscisses.

0,25pt

b) Montrer que (d_n) est une suite géométrique et en déduire que $OM_n = (\sqrt{2})^n$

0,5pt

c) Exprimer en fonction de n la valeur de la somme $L_n = OM_1 + OM_2 + \dots + OM_n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

0,25pt

Exercice 3 : (5,5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 + (x + 2)e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 1cm.

1° a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ puis calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. 0,75pt

b) Justifier que $f(x) = 1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$ puis calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. 0,75pt

2° Calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f . Dresser le tableau de variation de f . 0,75pt

3° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α . Justifier que $-2,2 < \alpha < -2$ 0,75pt

4° a) Montrer que $I(0;3)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C) . Ecrire une équation de la tangente T à (C) en ce point. 0,5pt

b) Construire la courbe (C) et sa tangente T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 0,5pt

5° Soit S l'aire, en cm^2 , de la partie du plan fermée par la courbe (C) et les axes de coordonnées.

a) Montrer que $S = \int_{\alpha}^0 f(x) dx$. 0,5pt

b) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + h'(x)$, où $h(x) = -(x + 3)e^{-x}$. En déduire une primitive de f sur \mathbb{R} . 0,5pt

c) Justifier que $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha + 2}$ et en déduire que $S = \frac{-(\alpha + 3)^2}{\alpha + 2}$. 0,5pt

Exercice 4 : (6,5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$, et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in I$ et étudier son signe sur cet intervalle. 0,5pt

b) Calculer $g(1)$, puis en déduire que g est positive sur I . 0,5pt

2° a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement. 0,75pt

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 2$ est asymptote à Γ et étudier leur position relative. 0,5pt

3° a) Montrer que $\forall x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ (g étant la fonction définie en 1°). 0,5pt

b) En déduire le signe de f' puis dresser le tableau de variation de la fonction f . 0,5pt

c) Montrer que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un seul point A d'abscisse β . Vérifier que $1,47 < \beta < 1,48$ 0,5pt

4° a) Déterminer une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse e . 0,5pt

b) Construire la courbe Γ , l'asymptote Δ ainsi que la tangente T dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ 0,5pt

c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $(m + 2)x = 2 \ln x$. 0,5pt

5° a) Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J à déterminer. 0,5pt

b) Vérifier que $f^{-1}(-1) = 1$ et calculer $(f^{-1})'(-1)$, où f^{-1} est la réciproque de f . 0,5pt

c) Construire la courbe (Γ') de f^{-1} dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . 0,25pt

Fin.