Baccalauréat 2015

Session Complémentaire

Série : C &t TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients:9 & 6

Exercice 1 (3 points)

Soit x et y des entiers relatifs. On pose $f(x,y) = 2x - 3y$

1.a) Calculer $f(5,3)$. (0,5 pt)

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $2x - 3y = 1$. (1 pt)

2) Pour tout entier naturel *n* on pose $X_n = f(5^n, 3^n)$.

a) Trouver, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de X_n par 7. (1 pt)

b) Montrer que $X_{2015} - 5$ est divisible par 7. (0,5 pt)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (1+20i)z + 14 - 5i$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z-i)(z^2 + az + b).$$ (1 pt)

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$. (1 pt)

2) On considère les points A,B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 4 + i$ et $z_c = 2 + 3i$.

Soit s la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a) Donner l'expression complexe de s. (0,75 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de s. (0,5 pt)

3.a) Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan définis par : (0,25pt)

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \frac{z-i}{z-4-i} \text{ est imaginaire pur.}$$ (0,25 pt)

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \frac{z-i}{z-2-3i} \text{ est imaginaire pur.}$$ (0,25 pt)

b) Justifier que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

Exercice 3 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O et de coté a, $(a > 0)$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes (on prendra (AB) horizontale). (0,5 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme B en C et J en K. Préciser le centre et un angle de r_1. (0,75 pt)

c) Soit la rotation r_2 qui transforme B en C et K en J. Préciser le centre et un angle de r_2. (0, 5 pt)

2.a) Soit $f = r_1 \circ r_2$ et $g = r_2 \circ r_1$. Caractériser f et g. (0,5 pt)

b) Montrer que $g \circ f = t_{\overrightarrow{BC}}$ où $t_{\overrightarrow{BC}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. (0,25 pt)

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme B en I et C en J. Déterminer l'angle et le rapport de s. (0,5 pt)

b) Déterminer $s(A)$ et $s(O)$. (0,25 pt)

c) Caractériser la composée $h = r_1 \circ s$. (0,25 pt)

4) Soit Γ l'ellipse de foyers I et J passant par C.

a) Montrer que $K \in \Gamma$. (0,25 pt)

b) Construire les sommets de Γ. Justifier la construction. (0,25 pt)

Exercice 4 (4 points)

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$.

a) Dresser le tableau de variation de f. (0,75 pt)

b) Tracer C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. (0,25 pt)

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n(x) = \dfrac{(1+x)^n}{e^x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(t)dt$.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$ (0,75 pt)

3) Soit $I_n = F_n(0) = \int_{-1}^{0} f_n(t)dt$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$. (0,5pt)

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. (0,5 pt)

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \le I_n \le \dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. (0,5 pt)

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \dfrac{I_n}{n!}$

a) Montrer que $U_{n+1} = U_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$. En déduire que $U_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. (0,5 pt)

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. (0,25 pt)

Exercice 5 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\ln(x+1)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement. (0,5 pt)

b) Calculer $f'(x)$ et justifier que : (0,5 pt)

$$\begin{cases} -1 < x \le 0 \Rightarrow f'(x) \le 0 \\ x \ge 0 \Rightarrow f'(x) \ge 0 \end{cases}.$$

c) Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)

2.a) Tracer la courbe (C). (0,25 pt)

b) En remarquant que $\dfrac{x^2}{1+x} = x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$, calculer $\int_0^1 \dfrac{x^2}{1+x}dx$. (0,5 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (0,25 pt)

3) Pour tout entier naturel non nul n on pose : $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n). Justifier que $U_1 = \dfrac{1}{4}$. (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. (0,5 pt)

4) Pour tout $n \geq 2$; et pour tout réel x de [0,1] on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - .... + (-x)^n .$$

a) Justifier que : $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$. (0,25 pt)

b) Montrer que: $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$. (0,25 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\ln 2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right) .$$ (0,25 pt)

5) Soit $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

a) Montrer que : $\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$. (0,25 pt)

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ln 2$. (0,25pt)

c) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)U_n$. (0,25 pt)

Fin.