Baccalauréat 2012

Session Complémentaire

رمضان 1433 هـ

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z)=z^3-(4-2i)z^2+(4-6i)z-4+8i$.

a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z)=(z+2i)(z^2+az+b)$$ **(0,75 pt)**

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. **(0,75 pt)**

2. Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.

a) Placer les points A, B et C. **(0,5 pt)**

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$. **(0,5 pt)**

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\dfrac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur. **(0,5 pt)**

3. Pour tout point M du plan on pose : $\varphi(M)=3MO^2-4MA^2+MB^2+2MC^2$ et on note Γ_k l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=k$, où k est un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_k. **(0,5 pt)**

b) Déterminer et construire Γ_{16}. **(0,5 pt)**

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par: $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer et interpréter graphiquement : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. **(1 pt)**

b) Dresser le tableau de variation de f. **(1 pt)**

c) Construire la courbe (C). **(0,5 pt)**

2. Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose :

$$U_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+...+\frac{1}{n\ln n}-\ln(\ln n).$$

a) Montrer que tout entier naturel $n\geq 2$, $\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\leq\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)dt\leq\dfrac{1}{n\ln n}$ **(0,5 pt)**

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 2$, $U_{n+1}-U_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\displaystyle\int_n^{n+1}f(t)dt$. En déduire le sens de variation de (U_n). **(0,5 pt)**

c) Montrer que tout entier naturel $n\geq 2$, $U_{n+1}-U_n\geq f(n+1)-f(n)$. En déduire que $U_n\geq -\ln(\ln 2)$. **(0,25 pt)**

d) Déduire de ce qui précède que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $-\ln(\ln 2)\leq\ell\leq\dfrac{1}{2\ln 2}-\ln(\ln 2)$. **(0,25 pt)**

Exercice 3 (6 points)

Soit $\mathbf{f}$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $\mathbf{f(x)=\frac{2x^3-3x^2+1}{e^x}}$.

On désigne par $\mathbf{(C)}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathbf{(O;\vec{i},\vec{j})}$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. **(1 pt)**

b) Montrer que la courbe $\mathbf{(C)}$ de $\mathbf{f}$ admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point d'abscisse $\mathbf{1}$. **(1 pt)**

2.a) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. **(0,5 pt)**

b) Construire la courbe $\mathbf{(C)}$. **(0,5 pt)**

3. Pour tout entier naturel $\mathbf{n}$, on pose : $\mathbf{I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx}$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique $\mathbf{(I_n)}$. **(0,5 pt)**

b) Montrer que la suite $\mathbf{(I_n)}$ est positive et décroissante. Que peut-on en conclure ? **(0,5 pt)**

c) Donner un encadrement du nombre $\mathbf{I_n}$ qui permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. Calculer cette limite. **(0,5 pt)**

4.a) Calculer $\mathbf{I_0}$. **(0,5 pt)**

b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $\mathbf{n}$: $\mathbf{I_{n+1}=\frac{-1}{e}+(n+1)I_n}$. **(0,5 pt)**

c) Calculer l'aire sous la courbe $\mathbf{(C)}$ délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $\mathbf{x=0}$ et $\mathbf{x=1}$. **(0,5 pt)**

Exercice 4 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct $\mathbf{ABCD}$ de coté $\mathbf{a}$, $\mathbf{(a>0)}$.
Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ les symétriques respectifs des points $\mathbf{C}$ et $\mathbf{B}$ par rapport à $\mathbf{(AD)}$. Soit $\mathbf{G}$ le point tel que le triangle $\mathbf{DBG}$ soit équilatéral direct. Soient $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ les milieux respectifs des segments $\mathbf{[DB]}$ et $\mathbf{[DF]}$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. **(1 pt)**

b) Montrer qu'il existe une unique rotation $\mathbf{r_1}$ qui transforme $\mathbf{D}$ en $\mathbf{G}$ et $\mathbf{F}$ en $\mathbf{B}$. Préciser l'angle et le centre de $\mathbf{r_1}$. **(1 pt)**

c) Soit la rotation $\mathbf{r_2}$ qui transforme $\mathbf{G}$ en $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Préciser l'angle et le centre de $\mathbf{r_2}$. **(0,5 pt)**

d) On pose $\mathbf{r=r_2\circ r_1}$. Déterminer $\mathbf{r(D)}$ et $\mathbf{r(F)}$. Caractériser $\mathbf{r}$. **(0,75 pt)**

2. On considère l'homothétie $\mathbf{h}$ de centre $\mathbf{B}$ et de rapport $\mathbf{k=\frac{1}{2}}$. On note $\mathbf{s=h\circ r}$.

a) Montrer que $\mathbf{s}$ est une similitude directe. Préciser le rapport et un angle de $\mathbf{s}$. **(0,75 pt)**

b) Soit $\mathbf{\Omega}$ le centre de $\mathbf{s}$. Montrer que $\mathbf{\Omega}$ appartient à deux cercles $\mathbf{\Gamma_1}$ et $\mathbf{\Gamma_2}$ que l'on déterminera. **(0,75 pt)**

c) Déterminer deux réels α et β tels que $\mathbf{\Omega}$ soit le barycentre du système $\mathbf{\{(E,\alpha);(I,\beta)\}}$. Placer $\mathbf{\Omega}$ sur la figure. **(0,25 pt)**

3. On considère l'ensemble $\mathbf{\Gamma}$ des points $\mathbf{M}$ du plan tels que $\mathbf{MA+ME=2a}$ où $\mathbf{a}$ est la longueur du coté du carré $\mathbf{ABCD}$.

a) Montrer que $\mathbf{\Gamma}$ est une ellipse passant par $\mathbf{D}$. **(0,5 pt)**

b) Préciser les sommets, les longueurs des axes de $\mathbf{\Gamma}$ et calculer son excentricité $\mathbf{e}$. **(0,25 pt)**

c) Déterminer $\mathbf{\Gamma'=s(\Gamma)}$ puis construire $\mathbf{\Gamma}$ et $\mathbf{\Gamma'}$. **(0,25 pt)**

Fin.