Nom de l'élève :

ECOLES PRIVEES ERRAJA
Ingénierie de la réussite

مدارس الرجاء الحرة
هندسة النجاح

Série d'exercices

Maths AL-2
Niveau 7C

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

Déterminer le module et un argument, puis écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivant:

$$(2-2i)^5, \frac{1}{(1-i\sqrt{3})^{10}}, \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}, \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}, \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8, \frac{(-2i)(1+i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^4}$$

Exercice 2

Déterminer suivant les valeurs de θ ($\theta \in [0;2\pi[$) le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivant:

$$z_1 = \cos\theta + i(1+\sin\theta), z_2 = 1+\cos\theta + i\sin\theta \; z_3 = 1+\sin\theta - i\cos\theta, \quad z_4 = 1+i\tan\theta,$$

$$z_5 = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}, z_6 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$$

Exercice 3

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que:

1. $|z+2-3i| = 2$
2. $|z+4+3i| = |z-3-4i|$
3. $\left|\frac{z+2-3i}{iz-1-i}\right| = 1$
4. $|z+2-3i| = |\bar{z}+2i|$
5. $|(1-i)z-2i| = |(1+i)z-4-4i|$
6. $\left|\frac{z+1+2i}{z-3i}\right| = 3$

Exercice 4

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $\arg\frac{z+2i}{z-i} = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
2. $\arg\frac{z+2i}{z-i} = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$
3. $\arg\frac{z+1-2i}{z-1-3i} = \frac{\pi}{3} \quad [\pi]$
4. $\arg(z-2-2i) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes:

$$iz^2 + (1-5i)z - 1 + 4i = 0 \qquad z^2 + 21 - 20i = 0 \qquad z^2 - (5-2i)z + 50i = 0$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes sachant qu'elle admet une racine réelle :

$$z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i) = 0$$

$$z^3 - (11+2i)z^2 + 2(17+7i)z - 42 = 0$$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure :

$$(1+i)z^3+2z^2+(-1+5i)z+10(1+i)=0$$
$$z^3+(1-5i)z^2-2(5+i)z+8i=0$$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes:

$$z^4-(5-2i)z^2+50i=0 \text{ ; (On pose } Z=z^2\text{)}$$
$$10z^4-(39-3i)z^3+60z^2-(39-3i)z+10=0 \text{ ; (On pose } Z=z+\frac{1}{z}\text{).}$$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système:

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=1 \\ z_1z_2z_3=1 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \end{cases}$$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $z^{2013}=\overline{z}$

Exercice 11

Soit $z=e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $\alpha=z+z^2+z^4$.

1.Calculer $\alpha+\overline{\alpha}$ et $\alpha\overline{\alpha}$.

2. En déduire que : $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2}$ **et que** $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 12

Soit $z=e^{i\frac{\pi}{2013}}$. Montrer que $1+z^2+z^4+...+z^{2012}=\frac{1}{1-z}$.

Exercice 13

Linéariser chacune des expressions suivantes: $\cos 3x\sin 2x$, $\cos 2x\sin^2 x$, $\cos^2 x\sin^3 x$

Exercice 14

Simplifier les expressions suivantes:

1) $\begin{array}{l} C_n=1+\cos x+\cos 2x+\cdots\cos nx \\ S_n=\sin x+\sin 2x+\cdots\sin nx \end{array}$; (On pourra calculer C_n+iS_n)

2) $\begin{array}{l} C_n=\cos^2 x+\cos^2 x\cos 2x+\cdots+\cos^n x\cos nx \\ S_n=\cos x\sin x+\cos^2 x\sin 2x+\cdots+\cos^n x\sin nx \end{array}$; (On pourra calculer C_n+iS_n)

3) $T_n=\frac{\sin x+\sin 3x+\cdots+\sin(2n-1)x}{\cos x+\cos 3x+\cdots\cos(2n-1)x}$

Exercice 15

θ étant un réel, on donne l'équation E dans $\mathbb{C}$: $z^2-(1+i\sin 2\theta)z+\frac{1}{2}i\sin 2\theta=0$ où $\theta\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Résoudre cette équation. Préciser le cas des racines doubles.

2) Soient M' et M" les points images des solutions z' et z" de E, I le milieu de [M'M"].

a) Déterminer le lieu géométrique de I lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que les points M' et M" appartiennent a un cercle dont on déterminera le rayon et le centre.

c) Montrer que si M' et M"sont distincts, alors la droite (M'M") admet une direction fixe indépendante de θ.
d) En déduire une construction de M',M" et I pour une valeur donnée de θ.

Exercice 16

Soit (C) le cercle de centre A(1,0), de rayon 1. Pour tout point M distinct de O du cercle (C), on considère le point M', symétrique de M par rapporta (x'Ox).
1) Expliquer pourquoi l'affixe z du point M peut se mettre sous la forme $z = 1 + e^{i\theta}$, $(\theta \in]-\pi, \pi[)$.
2) Déterminer l'affixe z' de M'.
3) Calculer le quotient $\dfrac{z}{z'-1}$ en fonction de θ.
4) Déduisez-en les points M de (C) pour lesquels:
a) $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires. b) $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux.

Exercice 17

Soient ABC et AB'C' deux triangles directs rectangles isocèles en A. Soient a,b,c,a',b' les affixes respectives des points A,B,C,B',C'.
1) Exprimer c et c' en fonction de a , b et b'.
2) Montrer que $BB' = CC'$ et $(BB') \perp (CC')$.

Exercice 18

Montrer que les points M_1, M_2, M_3 d'affixes z_1, z_2, z_3 sont alignés si et seulement si
$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} = \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1$.

Exercice 19

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC rectangle isocèle direct rectangle en A. Soit I le milieu de [BC], T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$; R_B et R_C deux quart de tours directs de centres B et C. On pose $S = R_C o T o R_B$.
1) Donner l'expression complexe, dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, de chacune des transformations T, R_B et R_C.
2) Donner l'expression complexe de S puis la caractériser.

Exercice 20

Le triangle ABC est quelconque; M est le milieu du segment [BC].
Les triangles BAB' et C'AC sont rectangles et isocèles directs de sommet A. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c.
1) Quelles sont les affixes m,b,c' des points M,B',C'?
2) Démontrer que les droites (AM) et (B'C') sont perpendiculaires et que: B'C' = 2AM.

Exercice 21

Soit a un nombre complexe non nul. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Montrer que les points d'affixes a, aj, aj^2 dans cet ordre, sont les sommets d'un triangle équilatéral direct.

Exercice 22

Montrer que les points A,B,C d'affixes a,b,c sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

Exercice 23

Dans le plan orienté on considère deux triangles ABC et DEF équilatéraux directs. Les points G et H tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes. Soient a,b,c,d,e,f,g,h les affixes respectives des points A,B,C,D,E,F,G,H.
1) Exprimer $c - a$ en fonction de $b - a$, puis $f - d$ en fonction de $e - d$ /
2) Exprimer g en fonction de b,d,e ; puis h en fonction de c,d,f.
3) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral.

Exercice 24

Dans le plan orienté, OAB est un triangle direct non rectangle. On construit les carrés directs AONP, OBCU et BATI. On muni le plan d'un repère orthonormal d'origine O tel que n et b soient les affixes respectives de N et B.

1) Déterminer les affixes de A et U. **2) Démontrer que $AU = BN$ et $(AU) \perp (BN)$. Quelles sont les relations semblables qu'on peut déduire ?**

3) Soit G le point tel que OUGN soit un parallélogramme. Démontrer que le triangle GPC est isocèle rectangle direct.

4) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{GN}$ et r le quart de tour direct de centre O.

a) Déterminer l'image de G par $r \circ t$.

b) Soit C' le symétrique de C par rapport à B. Montrer que $r(C') = C$ puis déterminer $r \circ t(B)$.

c) En déduire que $AC = GB$ et $(AC) \perp (GB)$.

Exercice 25

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et f_θ l'application du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = (1 - i\cos\theta)z - \cos\theta$.

1) Démontrer que f_θ est une similitude directe et déterminer son rapport en fonction de θ et son centre.

2) Soient Ω le point d'affixe i ; α une mesure de l'angle de f_θ avec $-\pi < \alpha \leq \pi$.

a) Montrer que si M est un point distinct de Ω alors $\Omega MM'$ est un triangle rectangle indirect.

b) Montrer que si M est un point distinct de Ω alors $\frac{\Omega M}{\Omega M'} > \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire que $-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0$.

3) Soit A un point distinct de Ω. Déterminer l'ensemble des points:

a) Γ_1 ensemble des images de A par f_θ. **b) Γ_2 l'ensemble des antécédents de A par f_θ.**

4) Représenter Γ_1 et Γ_2 pour A(1;1).

Exercice 26

On considère un triangle ABC de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles ACQ, BAR et CBP rectangle et isocèle respectivement en A, B et C. Soient P', Q' et R' les milieux respectifs des segments [BP], [CQ] et [AR].

L'objectif de cette partie est de montrer que les triangles ABC, PQR et $P'Q'R'$ sont de même centre de gravité. On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient a, b, c, p, q, r, p', q' et r' les affixes respectives des points A, B, C, P, Q, R, P', Q' et R'.

1. Faire une construction illustrant les données précédentes.

2.a) Montrer que $p' = \frac{b - ic}{1 - i}$ puis écrire q' en fonction de a et c ; r' en fonction de a et b.

b) Calculer $p' + q' + r'$ en fonction de a, b et c puis en déduire que les triangles ABC et $P'Q'R'$ ont le même centre de gravité G d'affixe g.

3. Exprimer chacun des complexes p, q et r en fonction de a, b et c puis montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité G.

Exercice 27

Dans le plan complexe, on considère le point A_k d'affixe $z_k = ae^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $a > 0$, $0 \leq k < n, n \geq 2$. Soit M le point d'affixe $z = re^{i\theta}$ où $r > 0$.

1) Montrer que $z^n - a^n = (z-a)(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_{n-1})$.

2) En posant $a = 1$; montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = n.2^{1-n}$ puis que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \sqrt{n}.2^{1-n}$.